

ZAŁĄCZNIK 2

**AUTOREFERAT PRZEDSTAWIAJĄCY OPIS DOROBKU
I OSIĄGNIĘĆ NAUKOWYCH**

2. Jednotematyczny cykl publikacji pt.

„Optymalizacja dokładności wyznaczania współrzędnych punktów osnów do pomiarów realizacyjnych oraz do obserwacji przemieszczeń punktów w oparciu o zaproponowane globalne wskaźniki mocy sieci geodezyjnych”

Jednotematyczny cykl publikacji pt.:

„Optymalizacja dokładności wyznaczania współrzędnych punktów osnów do pomiarów realizacyjnych oraz do obserwacji przemieszczeń punktów w oparciu o zaproponowane globalne wskaźniki mocy sieci geodezyjnych”

Jednotematyczny cykl publikacji, który stanowi podstawę przewodu habilitacyjnego, składa się jednego rozdziału monografii, z trzech artykułów naukowych i jednej pozycji książkowej, czyli:

- [1] Optimization of setting out controls in aspect of stakeout accuracy of engineering objects / Janusz DĄBROWSKI // Geomatics and Environmental Engineering ; ISSN 1898 1135. — Tytuł poprz.: Geodezja oraz Inżynieria Środowiska. — 2014 vol. 8 no. 3, s. 27–40. — Bibliogr. s. 39–40. **5 punktów**
- [2] Accuracy standards of tying the horizontal and vertical control network to the national geodetic control network/ Janusz DĄBROWSKI // Geomatics and Environmental Engineering ; ISSN 1898-1135. — Tytuł poprz.: Geodezja oraz Inżynieria Środowiska. — 2014 vol. 8 no. 3, s. 41–57. — Bibliogr. s. 56–57 **5 punktów**
- [3] Determination of displacements and deformations of engineering objects in mining areas/ Janusz DĄBROWSKI // Przegląd Górniczy ; ISSN 0033-216X. — 2013 t. 69 nr 5, s. 25–30. — Bibliogr. s. 29–30, Streszcz., Abstr., Zsfassung, Rés., Rez. **6 punktów**
- [4] Zagadnienia geodezji inżynierskiej dotyczące inwestycji drogowych. Geodesy engineering issues for road investments / Janusz DĄBROWSKI; Kraków; (Wydawnictwa Naukowe / Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie ; KU 0579). Bibliogr. s. 127-134, Streszcz., Summ. ISBN: 978-83-7464-728-1 **20 punktów**
- [5] Chosen issues of geodetic science /Janusz Dąbrowski i in.; Jarosław Wydawnictwa Państwowej Wyższej Szkoły Techniczno-Ekonomicznej w Jarosławiu, ISBN: 978-83-63909-52-9 (rozwińcie tezy w III rozdz. str.34-42) **10 punktów**

Suma punktów 46

Wyżej wymienione publikacje stanowią podstawę do sformułowania czterech tez naukowych dotyczących optymalizacji dokładności wyznaczania osnów realizacyjnych i określania przemieszczeń punktów obiektów inżynierskich. Po każdej sformułowanej tezie autor przedstawia problem badawczy, a następnie omawia wyniki badań. Końcowym elementem tych rozważań, jest wskazanie oryginalnych osiągnięć w rozwinięciu postawionych tez naukowych.

Janusz Dąbrowski

Teza nr 1. Sformulowana na podstawie poz. [1]:

Dokładność wyznaczania współrzędnych punktów osnow realizacyjnych powinna być ściśle powiązana z tolerancjami budowlanymi tyczonych obiektów. Z uwagi na okoliczność, że podczas tyczenia planu realizacyjnego mogą być wykorzystane różne kombinacje punktów osnowy realizacyjnej, do określenia wskaźników niedokładności osnowy realizacyjnej powinny być wykorzystane wszystkie kombinacje dwójkowe punktów tej osnowy. W tym celu powinny być zdefiniowane dwie funkcje ortogonalne, które będą we wszystkich kombinacjach dwójkowych wiązać punkty osnowy realizacyjnej. Pierwsza funkcja powinna uwzględniać zmianę długości sumy odcinków wszystkich kombinacji dwójkowych, zaś druga funkcja, jako ortogonalna względem pierwszej, powinna określać sumę zmian azymutów odcinków we wszystkich kombinacjach dwójkowych. Macierz kowariancji utworzona dla tych dwóch funkcji powinna być analitycznie powiązana z najmniejszą tolerancją budowlaną zawartą w planie realizacyjnym.

Sformułowanie problemu badawczego dotyczącego tezy nr 1

Optymalizacja sieci punktów geodezyjnych może być prowadzona przy uwzględnieniu trzech zasadniczych kryteriów projektowych, które zawarte są w pracach (Prószyński 1997) i (Prószyński 2006). Etapy projektowania i wyznaczania optymalnej sieci geodezyjnej dla ustalonego celu zostały przedstawione w pracy (Czaja 1996). (Cross 1985), w swoich badaniach skupia uwagę na doborze odpowiednich wag dla obserwacji w sieciach geodezyjnych. Jednym ze sposobów optymalizacji sieci geodezyjnych jest strategia dążenia do zrównoważenia obserwacji, która została rozwinięta przez (Kampmanna 1994) i (Caspary'ego 1998). Inną propozycję optymalizacji sieci geodezyjnej przedstawił (Hekimoglu 1998) i (Kampmann i Krause 1996). Zagadnienie optymalizacji sieci punktów geodezyjnych ściśle wiąże się z wewnętrzną i zewnętrzną niezawodnością sieci. Teoria niezawodności sieci jest przedmiotem wielu prac naukowych, a prekursorami tych badań są (Barda 1967,1968,1977) i (Pope 1975). Znaczące osiągnięcia w tym zakresie reprezentują prace (Prószyńskiego 1997 i 2000).

Przedstawiana praca dotyczy sieci geodezyjnej stanowiącej osnowę realizacyjną, stąd zasadniczym kryterium jej optymalizacji jest graniczna tolerancja budowlana, która odnosi się do elementów tyczonych planu realizacyjnego. W procesie optymalizacji bierze się pod uwagę konstrukcję osnowy realizacyjnej oraz dokładność pomiarów jej elementów. W rozważaniach tych uwzględnia się nowoczesne przyrządy pomiarowe o najwyższej dokładności, optymalną liczbę obserwacji możliwych do wykonania w terenie, oraz ustalaną dokładność estymacji współrzędnych punktów tej sieci w odniesieniu do dopuszczalnej tolerancji budowlanej tyczonych obiektów.

Na podstawie macierzy kowariancji dla estymowanych współrzędnych punktów osnowy realizacyjnej został zdefiniowany globalny parametr jej niedokładności, który uwzględnia konstrukcję osnowy oraz niedokładność pomiaru wszystkich jej elementów. Globalny parametr niedokładności osnowy realizacyjnej jest bezpośrednio powiązany z tolerancjami budowlanymi obiektów przeznaczonych do wytyczenia w terenie. Do rozwiązania matematycznego powyższego problemu zostały zdefiniowane dwie ortogonalne funkcje F_d i F_k , które wiążą wszystkie współrzędne punktów osnowy realizacyjnej. Macierz kowariancji $Cov[F_d, F_k]$ tych funkcji, przetransformowana na parametry elipsy stałej gęstości prawdopodobieństwa, obrazuje globalną niedokładność rozważanej osnowy realizacyjnej. Na podstawie niezmiennika tej macierzy można dokonać wyboru optymalnego wariantu pomiaru projektowanej osnowy realizacyjnej, który zapewni tyczenie obiektów w granicach dopuszczalnej wartości tolerancji budowlanej.

Ideą artykułu jest podjęcie próby zdefiniowania wskaźnika niedokładności osnowy realizacyjnej na bazie macierzy wariancyjno-kowariancyjnej.

Wytyczenie planu realizacyjnego w terenie, określającego urbanistyczne i architektoniczne zagospodarowanie terenu inwestycji, polega na wyznaczeniu przestrzennego położenia punktów reprezentujących osie główne oraz elementy budynków i budowli, które stanowią treść tego planu. Tyczenie planu realizacyjnego zazwyczaj odbywa się w odniesieniu do wcześniej wyznaczonej osnowy realizacyjnej, reprezentowanej przez zbiór utrwalonych w terenie punktów geodezyjnych o współrzędnych wyznaczonych z odpowiednią dokładnością. Dokładność wyznaczenia współrzędnych punktów osnowy realizacyjnej powinna być odniesiona do tolerancji budowlanych obiektów objętych planem realizacyjnym.

Wyjściowymi parametrami określającymi wymaganą dokładność geodezyjnych prac realizacyjnych są graniczne tolerancje (GT) budowlane, których wartości są przedstawiane w instrukcjach branżowych. Tolerancje te stanowią dopuszczalne różnice długości w poziomie lub w pionie między wymiarami zrealizowanego obiektu a wymiarami projektowanymi, albo dopuszczalne odchylenia od linii pionu lub nachylenia do płaszczyzny poziomej. Wartości tych tolerancji powinny być uwzględnione przy projektowaniu i wyznaczaniu osnowy realizacyjnej. Jeżeli końcowym efektem geodezyjnego tyczenia ma być określone w przestrzeni położenie elementu budowli lub jego wymiar, to odchyłka GT_G z tytułu prac geodezyjnych powinna spełniać warunek:

$$GT_G \leq t \cdot GT \quad (1.1)$$

przy czym parametr t określa jaka część granicznej tolerancji (GT) może przypadać na odchyłkę z tytułu prac geodezyjnych.

Wartość parametru t ustala się w zależności od sposobu podziału granicznej tolerancji na część GT_B wynikającą z niedokładności prac budowlano-montażowych i na część GT_G z tytułu niedokładności prac geodezyjnych. Przyjmując model losowy podziału tolerancji GT na dwie równe części, czyli:

$$(GT)^2 = (GT_B)^2 + (GT_G)^2 \quad (1.2)$$

otrzymujemy

$$GT_B = GT_G \cong 0,7 GT \quad (1.3)$$

co oznacza, że dla takiego modelu tolerancji wartość parametru t będzie na poziomie 0,7.

Na odchyłkę wynikającą z prac geodezyjnych $GT_G = 0,7 \cdot GT$ składa się niedokładność wyznaczenia punktów osnowy realizacyjnej oraz niedokładność czynności tyczenia. Zakładając najprostszy losowy model podziału odchyłki GT_G na dwie równe części, z tytułu niedokładności osnowy realizacyjnej GT_O i z tytułu niedokładności czynności tyczenia GT_T , otrzymujemy:

$$GT_O = GT_T \cong 0,7 GT_G \quad (1.4)$$

Po uwzględnieniu zależności (1.4), można zapisać ostateczny wzór na graniczną odchyłkę wyznaczenia przestrzennego położenia elementu budowli z tytułu niedokładności wyznaczenia punktów osnowy realizacyjnej, następująco:

$$GT_O \cong 0,7 \times 0,7 \times GT \cong 0,5 \times GT \quad (2.5)$$

Odchyłka z tytułu niedokładności wyznaczenia punktów osnowy realizacyjnej, spełniająca warunek, $GT_O \leq 0,5 \cdot GT$ zostanie wykorzystana do ustalenia przedziału ufności dla niedokładności wyznaczenia punktów osnowy realizacyjnej.

Do sformułowania przedziału ufności dla wielkości GT_O został przyjęty model, w którym zmienna losowa $GT_O = Y$ populacji ma rozkład $N(\mu, \sigma)$, przy czym zarówno wartość przeciętna μ jak i odchylenie standardowe σ stanowią nieznanne parametry tego rozkładu. Statystyka

$$T = \frac{\hat{Y} - \mu}{\sigma(\hat{Y})} \quad (1.6)$$

$$\text{dla } \mu = 0 \text{ i } \sigma(\hat{Y}) = \sqrt{\frac{\sum_i (Y_i - \hat{Y})^2}{n(n-u)}} \quad (1.6a)$$

ma rozkład prawdopodobieństwa Studenta o $\nu = (n - u)$ stopniach swobody. Ponieważ rozkład tej statystyki zależy tylko od liczby stopni swobody, zatem statystykę tę można wykorzystać do konstrukcji przedziału ufności dla wartości najbardziej prawdopodobnej GT_O reprezentowanej przez wartość przeciętną μ .

Długość symetrycznego przedziału ufności dla estymowanej wartości $GT_O = Y$ zależy od odchylenia standardowego wartości przeciętnej $\sigma[\hat{Y}]$, poziomu ufności $(1 - \alpha)$ i liczby stopni swobody (ν) i wyraża się następującym wzorem:

$$y_\alpha = 2t\left(1 - \frac{\alpha}{2}; \nu\right) \times \sigma[\hat{Y}], \quad (1.7)$$

Zależność (1.7) wyraża warunek, że globalna niedokładność przedziałowa wyznaczenia współrzędnych punktów osnowy realizacyjnej powinna być równa podwójnej wartości kwantyla rozkładu Studenta, przy ustalonym poziomie ufności $(1 - \alpha)$ i (ν) stopniach swobody, wymnożonej przez odchylenie standardowe zmiennej losowej $Y = GT_O \leq 0,5 \times GT$. Do realizacji warunku (1.7) zachodzi potrzeba opracowania algorytmu do globalnej oceny niedokładności osnowy realizacyjnej, która w interpretacji geometrycznej będzie reprezentowała globalną niedokładność wyznaczenia wzajemnego położenia punktów tej osnowy.

Omówienie wyników badań związanych z rozwinięciem tezy nr 1

Ortogonalne funkcje do określenia globalnego wskaźnika niedokładności osnowy realizacyjnej

Do tyczenia punktów terenowych reprezentujących elementy planu realizacyjnego, mogą być wybierane dowolne kombinacje punktów osnowy realizacyjnej, a to oznacza, że punktami odniesienia do tyczenia mogą być sąsiednie lub przeciwległe brzegowe punkty osnowy realizacyjnej, które często nie są powiązane bezpośrednimi pomiarami geodezyjnymi.

Do zdefiniowania funkcji ujmującej globalną niedokładność wyznaczenia wzajemnego położenia punktów osnowy realizacyjnej trzeba wykorzystać wszystkie kombinacje dwójkowe powiązania każdego punktu rozważanej osnowy z pozostałymi punktami tej osnowy. Zaproponowano dwie ortogonalne funkcje F_d i F_k , które ujmują geometryczne położenie każdego punktu rozważanej osnowy względem wszystkich pozostałych punktów tej osnowy. Funkcja F_d stanowi sumę rzutów przyrostów dx i dy każdego punktu sieci geodezyjnej na

wszystkie kierunki określone względem pozostałych punktów tej sieci, zatem przyrosty dx będą wymnażane przez cosinusy azymutu rozważanych kierunków, zaś przyrost dy przez sinusy tych azymutów. Funkcja F_k jest ortogonalna do funkcji F_d , stąd reprezentuje sumę rzutów przyrostów dx i dy każdego punktu rozważanej sieci na kierunki ortogonalne względem wszystkich kierunków rozważanych dla funkcji F_d .

Wykorzystując symboliczne zapisy sumowania, postać tych funkcji jest następująca:

$$F_d = dx_1 \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{1-i} + dy_1 \sum_{i=1}^n \sin \alpha_{1-i} + \dots + dx_n \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{n-i} + dy_n \sum_{i=1}^n \sin \alpha_{n-i} \quad (1.8)$$

$$F_k = dx_1 \sum_{i=1}^n (-\sin \alpha_{1-i}) + dy_1 \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{1-i} + \dots + dx_n \sum_{i=1}^n (-\sin \alpha_{n-1}) + dy_1 \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{n-1} \quad (1.9)$$

przy czym α_{k-i} - oznacza azymuty odcinków określonych przez ustalony punkt o numerze k do każdego pozostałego punktu osnowy o numerze i , przy czym $k \neq i$.

Jeżeli przyrosty dx i dy będą reprezentowane przez ich odchylenia standardowe, to funkcja F_d będzie reprezentować przedziałową miarę niedokładności określenia odległości pomiędzy wszystkimi dwójkami punktów rozważanej osnowy realizacyjnej, zaś F_k będzie przedstawiać przedziałową miarę niedokładności wyznaczenia azymutu odcinków określonych przez wszystkie kombinacje dwójkowe punktów rozważanej osnowy.

Analizując funkcje (1.8) i (1.9) można zauważyć, że dla punktów osnowy realizacyjnej, których współrzędne będą wyznaczane na podstawie pomiaru pęku kierunków rozłożonych w przybliżeniu równomiernie w różnych ćwiartkach koła, wyrażenia pod znakiem sumowania będą posiadały różne znaki i będą się wzajemnie redukowały, stąd współczynniki przy dx i dy będą przybierały wartości bliskie zera.

W przypadkach, gdy pęki kierunków będą skupione tylko w jednej ćwiartce koła, wtedy składowe sum cosinusów lub sinusów azymutów będą posiadały jednakowe znaki, stąd wartości rozważanych współczynników przy dx i dy będą przybierały wartości znacznie większe od 1. Z powyższej analizy wynika wniosek, że wartości współczynników występujących w funkcjach F_d i F_k mają zasadniczy wpływ na globalną niedokładność wyznaczenia wzajemnego położenia punktów osnowy realizacyjnej.

Globalna niedokładność wyznaczenia wzajemnego położenia punktów osnowy realizacyjnej

Zdefiniowane funkcje w formie zależności (1.8) i (1.9) stanowią podstawę do globalnej oceny niedokładności osnowy realizacyjnej, której współrzędne punktów są estymowane na podstawie wzoru (1.10) a ich macierz kowariancji jest określona według zależności (1.11) i (1.12). Na podstawie analizy wariancji dla funkcji (1.8) i (1.9) można określić macierz kowariancji dla wielkości F_d i F_k , czyli:

$$\text{Cov} \begin{bmatrix} V(F_d) & \text{cov}(F_d, F_k) \\ \text{cov}(F_d, F_k) & V(F_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{1-i} & -\sum_{i=1}^n \sin \alpha_{1-i} \\ \sum_{i=1}^n \sin \alpha_{1-i} & \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{1-i} \\ \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{2-i} & -\sum_{i=1}^n \sin \alpha_{2-i} \\ \sum_{i=1}^n \sin \alpha_{2-i} & \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{2-i} \\ \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{n-i} & -\sum_{i=1}^n \sin \alpha_{n-i} \\ \sum_{i=1}^n \sin \alpha_{n-i} & \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{n-i} \end{bmatrix}^T \text{Cov} [\hat{X}] \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{1-i} & -\sum_{i=1}^n \sin \alpha_{1-i} \\ \sum_{i=1}^n \sin \alpha_{1-i} & \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{1-i} \\ \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{2-i} & -\sum_{i=1}^n \sin \alpha_{2-i} \\ \sum_{i=1}^n \sin \alpha_{2-i} & \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{2-i} \\ \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{n-i} & -\sum_{i=1}^n \sin \alpha_{n-i} \\ \sum_{i=1}^n \sin \alpha_{n-i} & \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{n-i} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Macierz (1.13) zawiera informacje o odcinkowej niedokładności wyznaczenia punktów osnowy realizacyjnej w rozważanych kombinacjach dwójkowych.

Obrazem tej niedokładności może być elipsa stałej gęstości prawdopodobieństwa na poziomie błędu średniego rozważanych funkcji F_d i F_k , które posiadają ścisłą interpretację geometryczną. Na podstawie macierzy kowariancji (1.13) określa się półosie A i B elipsy stałej gęstości prawdopodobieństwa, które definiuje się według następujących wzorów:

$$\begin{bmatrix} V(F_d) & \text{cov}(F_d, F_k) \\ \text{cov}(F_d, F_k) & V(F_k) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A^2 \\ B^2 \end{cases} = \frac{V(F_d) + V(F_k)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{V(F_d) - V(F_k)}{2} \right]^2 + [\text{cov}(F_d, F_k)]^2} \quad (1.14)$$

Azymut α_A dłuższej półosi (A) tej elipsy wyznacza się według wzoru:

$$\text{arc tg } 2\alpha_A = \frac{2 \text{cov}(F_d, F_k)}{V(F_d) - V(F_k)} \quad (1.15)$$

Wyznaczone parametry elipsy według wzorów (1.14) i (1.15), zilustrowane graficznie w odpowiedniej skali, mogą stanowić podstawę do globalnej oceny niedokładności projektowanej lub wyznaczonej osnowy realizacyjnej. Określona długość półosi A rozpatrywanej elipsy reprezentuje globalną niedokładność wyznaczenia położenia punktu osnowy realizacyjnej w kierunku jej azymutu α_A , czyli w kierunku, w którym analizowana osnowa jest najsłabiej wyznaczona. Parametry elipsy stałej gęstości prawdopodobieństwa mogą być również podstawą do zdefiniowania jednowymiarowego wskaźnika przedziałowej niedokładności osnowy realizacyjnej, którego wartość powinna bazować na polu powierzchni tej elipsy, czyli na iloczynie jej półosi. Po wykonaniu odpowiednich przekształceń iloczynu parametrów A^2 i B^2 otrzymano następującą zależność:

$$A^2 \cdot B^2 = V[F_d] \cdot V[F_k] - \text{cov}^2[F_d, F_k] \quad (1.16)$$

Aby nadać praktyczny wymiar wyżej rozważanej zależności, pole powierzchni elipsy zostanie zastąpione przez pole powierzchni koła, którego promień R_G będzie reprezentował przedziałową globalną niedokładność wyznaczenia współrzędnych wszystkich rozważanych punktów w osnowie realizacyjnej, czyli

$$R_G = \sqrt[4]{V[F_d] \cdot V[F_k] - \text{cov}^2[F_d, F_k]} \quad (1.17)$$

Warto zaznaczyć, że wyrażenie pod znakiem pierwiastka stopnia 4 stanowi wartość wyznacznika z macierzy kowariancji określonej wzorem (1.13), która stanowi niezmiennik transformacji współrzędnych punktów osnowy realizacyjnej.

Jeżeli we wzorze (1.7) w miejsce Y_α podstawimy przedziałową niedokładność wyznaczenia współrzędnych wszystkich rozważanych punktów w osnowie realizacyjnej, zaś $\sigma(\hat{Y})$ zastąpimy $GT_o = 0,5 \times GT$, to otrzymamy warunek jaki musi być spełniony, aby wpływ osnowy realizacyjnej na niedokładność tyczenia elementów przestrzennych planu realizacyjnego nie przekraczał ustalonej części granicznej tolerancji budowlanej.

$$R_G \leq 2t\left(1 - \frac{\alpha}{2}; \nu\right) \times 0,5 \times GT \Rightarrow R_G \leq t\left(1 - \frac{\alpha}{2}; \nu\right) \times GT \quad (1.18)$$

Z powyższego warunku wynika, że przedziałowa globalna niedokładność wyznaczenia współrzędnych wszystkich rozważanych punktów w osnowie realizacyjnej powinna być mniejsza od granicznej tolerancji budowlanej pomnożonej przez kwantyl rozkładu prawdopodobieństwa statystyki Studenta.

Kwantyl ten powinien być realizowany dla poziomu ufności $1 - \alpha = 0,95$ oraz dla stopni swobody $\nu = n - u$, czyli równym liczbie obserwacji nadliczbowych w rozpatrywanej osnowie realizacyjnej.

Oryginalne rozwiązanie zawarte w rozwinięciu tezy nr 1

Oryginalnym rozwiązaniem zawartym w rozwiązaniu tezy nr 1 jest powiązanie dokładności wyznaczania osnowy realizacyjnej z tolerancją budowlaną dzięki zdefiniowaniu wskaźnika niedokładności osnowy geodezyjnej zbudowanego w oparciu o macierz kowariancji $\text{Cov}[F_d, F_k]$ dwóch ortogonalnych funkcji F_d i F_k (wiążących rozpatrywane punkty osnowy realizacyjnej). Na podstawie niezmiennika tej macierzy można dokonać wyboru optymalnego wariantu pomiaru projektowanej osnowy realizacyjnej, który zapewni tyczenie obiektów w granicach dopuszczalnej wartości tolerancji budowlanej. Przedstawione rozważania dotyczące osnow realizacyjnych można w całości zastosować do optymalizacji w zakresie projektowania, pomiaru i estymacji sieci punktów odniesienia, które można wykorzystać do wyznaczenia współrzędnych punktów reprezentujących tyczone i inwentaryzowane obiekty inżynierskie lub do określenia przemieszczenia punktów badanych obiektów. W formule (1.18) rolę granicznej tolerancji budowlanej (GT) przejmują dopuszczalne tolerancje dokładności wyznaczenia punktu inwentaryzowanego lub graniczna niedokładność określenia wektora przemieszczenia punktu.

Teza nr 2. Sformułowana na podstawie poz. [2]:

Dokładność wyznaczanych osnów realizacyjnych często znacznie jest wyższa od dokładności osnów państwowych, które służą do nawiązania. W celu sformułowania dokładnościowych kryteriów nawiązania osnów realizacyjnych wskazane jest wyprowadzenie takich formuł macierzowych, za pomocą których można prowadzić analizę wariancji oddzielnie dla punktów osnowy realizacyjnej i dla punktów nawiązania. W tym celu zachodzi konieczność określenia odwrotności macierzy blokowej (2×2) występującej w równaniach normalnych do estymacji współrzędnych punktów osnowy realizacyjnej i punktów osnowy państwowej w konstrukcji nawiązania. Wyprowadzenie wzorów na odwrotność macierzy blokowej o wymiarach (2×2) będzie wymagało rozwiązania układu 4 równań macierzowych.

Sformułowanie problemu badawczego dotyczącego tezy nr 2

Do wyrównania wyników pomiarów osnów wielorzędowych można stosować model Gaussa – Markowa przy uwzględnieniu macierzy wag dokładności dla wielkości obserwowanych, oraz przy uwzględnieniu pozornych równań obserwacyjnych dla współrzędnych punktów nawiązania. Dla pozornych równań obserwacyjnych przyporządkowuje się odpowiednie wagi dokładności dla rozpatrywanych współrzędnych punktów lub ich macierze kowariancji. Wielu autorów prac naukowych w tym zakresie wykorzystuje wyrównanie sekwencyjne wyników pomiaru, czyli wyrównanie realizowane w wielu etapach. Z zagranicznych autorów można wymienić prace (Baardy 1973), (Teunissen 2000) i (Rao 1982). Zagadnienie estymacji współrzędnych punktów osnów realizacyjnych w nawiązaniu do osnów państwowych jest zagadnieniem podobnym do wyrównania sieci wielorzędowych ale specyficzne przeznaczenie tych osnów stawia odmienne warunki ich nawiązywania do osnów państwowych. Problem ten, w zastosowaniu do badania przemieszczeń punktów, był rozwiązywany w Kanadzie przez (Chrzanowskiego 1981) i w NRF przez (Pelzera 1974). W kraju podobne rozważania były prowadzone przez (Czaję 1997) i (Prószczyńskiego i Kwaśniaka 2006). Rozwiązania zawarte w niniejszej publikacji zostaną odniesione tylko do trzech najbliższych tematycznie pozycji, czyli (Czaja 1996), (Prószczyński 1986) i (Wiśniewski 2005). W pracy (Czaja 1996) autor proponuje do wyrównania osnowy realizacyjnej włączyć obserwacje wiążące punkty osnowy państwowej. Dla współrzędnych punktów osnowy państwowej autor proponuje zestawić równania pseudoobserwacji z uwzględnieniem ich macierzy kowariancji. (Prószczyński 1986) w swojej pracy przedstawia sposób nawiązania osnów realizacyjnych do osnów państwowych za pomocą parametrów transformacji Helmerta. W pierwszym etapie osnowa realizacyjna wraz z wybranymi punktami osnowy państwowej jest wyrównywana w układzie lokalnym w sposób swobodny. W drugim etapie układ lokalny jest transformowany na układ państwowy na podstawie wcześniej estymowanych parametrów transformacji dla punktów dostosowania, czyli obrotu i przesunięcia. (Wiśniewski 2005) w swojej pracy zajmuje się wyrównywaniem wyników obserwacji w sieciach geodezyjnych. (Wiśniewski 2005) wykazał, że formułowane równania pseudoobserwacji dla współrzędnych punktów i ich macierzy kowariancji, uzyskanych w poprzedzających etapach dają identyczne estymatory jak wyrównanie całej sieci geodezyjnej w jednym etapie.

Osnowy realizacyjne służą do wytyczenia obiektów budowlanych w terenie, stąd współrzędne ich punktów muszą być wyznaczane z wysoką dokładnością. Dokładność osnów realizacyjnych jest co najmniej o jeden rząd wyższa od osnów państwowych. Nawiązanie osnów realizacyjnych do współrzędnych punktów osnowy państwowej wykonuje się za pomocą geodezyjnej konstrukcji nawiązania. Konstrukcja nawiązania stanowi wybraną grupę punktów osnowy realizacyjnej i osnowy państwowej, w której są mierzone kąty i długości określone przez te punkty. Wyrównanie wyników pomiaru w konstrukcji nawiązania prowadzi do wyznaczenia estymatorów współrzędnych wybranych punktów osnowy państwowej i osnowy realizacyjnej, a także ich macierzy kowariancji. Do estymacji współrzędnych punktów w konstrukcji nawiązania trzeba wykorzystać macierz kowariancji dla współrzędnych

wybranych punktów osnowy państwowej. Ostateczne wyrównanie wyników pomiarów w osnowie realizacyjnej nie może być obciążone niedokładnością współrzędnych punktów osnowy państwowej, wchodzących do konstrukcji nawiązania. Do sformułowania dokładnościowych kryteriów nawiązania osnowy realizacyjnej wskazane jest, dla konstrukcji nawiązania, wyprowadzenie formuł oddzielnych dla estymacji współrzędnych punktów i ich macierzy kowariancji osnowy realizacyjnej oraz osnowy państwowej. Wyprowadzenie tych formuł odbywa się na drodze rozwiązania układu czterech równań macierzowych, które wynikają z odwrotności odpowiednio zdefiniowanej macierzy blokowej. Jako kryterium właściwego sposobu nawiązania osnowy realizacyjnej przyjmuje się relację wartości odchylenia standardowego dla odległości punktów w konstrukcji nawiązania do średniego odchylenia standardowego pomiaru długości boków w tej konstrukcji. Wartość średniego odchylenia standardowego jest wyznaczana na podstawie współczynnika wariancji uzyskanego z estymacji współrzędnych punktów w konstrukcji nawiązania oraz wariancji uwzględnianej w macierzy wagowej dla mierzonych odległości.

Na podstawie tej relacji zostały zaproponowane trzy sposoby nawiązywania osnów realizacyjnych do państwowego układu współrzędnych. Proponowane sposoby nawiązania osnowy realizacyjnej można wykorzystać przy tyczeniu obiektów budowlanych na małych obszarach a także do wyznaczania w terenie punktów granicznych działek budowlanych. Praktyczne zastosowanie proponowanej klasyfikacji do ustalenia odpowiedniego sposobu nawiązania osnowy realizacyjnej, wraz z interpretacją wyników obliczeń, zostało zilustrowane w formie przykładu liczbowego w (Dąbrowski 2014 a, b, d,).

Omówienie wyników badań związanych z rozwinięciem tezy nr 2

Podstawy teoretyczne modelu Gaussa - Markowa (L, AX, G) o parametrach losowych

Zakładamy, że L stanowi wektor zaobserwowanych zmiennych losowych, których wartość przeciętną można opisać za pomocą ustalonych modeli liniowych AX , przy czym X reprezentuje wektor estymowanych parametrów, zaś A reprezentuje macierz znanych współczynników przy estymowanych parametrach. W sieciach geodezyjnych wartości tych współczynników stanowią wartości pochodnych cząstkowych elementów obserwowanych (kątów i długości) względem współrzędnych punktów określających te elementy, natomiast estymowanymi parametrami są różniczki współrzędnych punktów państwowej osnowy nawiązania oraz różniczki współrzędnych punktów osnów realizacyjnych, które podlegają nawiązaniu. Przyjmujemy założenie, że wektor estymowanych parametrów X stanowi również zmienną losową o macierzy kowariancji C . Na obserwowane wielkości nakładamy warunek, że macierz G stanowi macierz kowariancji warunkowych obserwacji L przy ustalonych parametrach X , czyli $G = V(L \setminus X)$.

Po uwzględnieniu powyższych założeń, macierz kowariancji warunkowych obserwacji L określa się według zależności (Rao, 1982):

$$V(L) = E[V(L \setminus X)] + V(E(L \setminus X)) = G + V(AX) = G + ACA^T \quad (2.1)$$

W celu rozdzielenia procesu estymacji różniczek do współrzędnych punktów osnowy realizacyjnej od procesu estymacji różniczek współrzędnych punktów osnowy państwowej, dla których jest określona macierz kowariancji C , trzeba macierz współczynników A rozdzielić na dwie części, czyli macierze A_1 i A_2 . Macierz A_1 reprezentuje współczynniki przy różniczkach współrzędnych punktów państwowej osnowy, natomiast macierz A_2 reprezentuje współczynniki przy różniczkach współrzędnych punktów osnowy realizacyjnej. Jednocześnie estymowane parametry X podlegają analogicznemu podziałowi na X_1 i X_2 . Po uwzględnieniu

powyższych oznaczeń, układ równań obserwacyjnych dla konstrukcji nawiązania można przedstawić w następującej formule macierzy blokowych:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Dla układu równań (2.2) jest zdefiniowana macierz kowariancji w formie następującej macierzy blokowej:

$$\text{Cov}(\mathbf{L}; \mathbf{X}_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

gdzie:

\mathbf{G} - stanowi macierz kowariancji warunkowych obserwacji \mathbf{L} przy ustalonych parametrach \mathbf{X}_1
 \mathbf{C} - stanowi macierz kowariancji dla zmiennej losowej wielowymiarowej reprezentującej współrzędne punktów osnowy państwowej.

Po zrealizowaniu zasady najmniejszej sumy kwadratów odchyłek losowych dla układu (2.2), przy uwzględnieniu macierzy kowariancji (2.3), układ równań normalnych przedstawia się w następującej formie macierzy blokowych (Czaja 1997, Wiśniewski 2005):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{A}_1^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{G}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{G}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

W celu rozwiązania układu równań normalnych (2.4), z podziałem estymowanych parametrów na wektory różniczek \mathbf{X}_1 i \mathbf{X}_2 , trzeba określić odwrotność macierzy blokowej występującej w iloczynie z tymi parametrami. Dla uproszczenia przekształceń analitycznych, dla elementów macierzy blokowej zostaną przyjęte następujące oznaczenia:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{A}_1^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{12}^T & \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Odwrotność macierzy blokowej (2.5) jest zdefiniowana za pomocą następującego warunku:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{12}^T & \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{12}^T & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Realizacja warunku (2.6) prowadzi do układu 4 równań macierzowych następującej postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 \mathbf{H}_1 + \mathbf{N}_{12} \mathbf{H}_{12}^T &= \mathbf{I} \\ \mathbf{N}_1 \mathbf{H}_{12} + \mathbf{N}_{12} \mathbf{H}_2 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_{12}^T \mathbf{H}_1 + \mathbf{N}_2 \mathbf{H}_{12}^T &= \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_{12}^T \mathbf{H}_{12} + \mathbf{N}_2 \mathbf{H}_2 &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Rozwiązanie powyższego układu równań prowadzi do następujących wzorów na macierze \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 i \mathbf{H}_{12} :

$$\mathbf{H}_1 = (\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_{12} \mathbf{N}_2^{-1} \mathbf{N}_{12}^T)^{-1} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{H}_2 = (\mathbf{N}_2 - \mathbf{N}_{12}^T \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_{12})^{-1} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{H}_{12} = -\mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{N}_{12} \times (\mathbf{N}_2 - \mathbf{N}_{12}^T\mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{N}_{12})^{-1} \quad (2.10)$$

Na podstawie wzorów (2.8), (2.9) i (2.10) na odwrotność macierzy blokowej (2.5), rozwiązanie układu równań (2.4) można zapisać w następującej jawnej postaci:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_1 \\ \hat{\mathbf{X}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{12}^T & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T\mathbf{G}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{A}_2^T\mathbf{G}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Wyprowadzony wzór (2.11) pozwala estymować oddzielnie różniczki do współrzędnych punktów osnowy państwowej, w formie wektora $\hat{\mathbf{X}}_1$, oraz różniczki do przybliżonych współrzędnych punktów osnowy realizacyjnej, w formie wektora $\hat{\mathbf{X}}_2$. Po zrealizowaniu odpowiednich iloczynów macierzowych we wzorze (2.11) dla pierwszego wiersza macierzy blokowej \mathbf{H} , wektor $\hat{\mathbf{X}}_1$ wyraża się następującą zależnością:

$$\hat{\mathbf{X}}_1 = (\mathbf{H}_1\mathbf{A}_1^T\mathbf{G}^{-1} + \mathbf{H}_{12}\mathbf{A}_2^T\mathbf{G}^{-1}) \times \mathbf{L} \quad (2.12)$$

Podstawiając do powyższej zależności wzór (2.8) i wyłączając macierz \mathbf{H}_1 przed nawias otrzymujemy ostateczny wzór na estymowane różniczki do współrzędnych punktów osnowy państwowej, czyli

$$\hat{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{H}_1(\mathbf{A}_1^T\mathbf{G}^{-1} - \mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_2^{-1}\mathbf{A}_2^T\mathbf{G}^{-1}) \times \mathbf{L} \quad (2.13)$$

Po wykonaniu iloczynu macierzowego (2.11) dla drugiego wiersza macierzy \mathbf{H} i po wykonaniu podobnych przekształceń jak we wzorze (2.13), wektor $\hat{\mathbf{X}}_2$ jest określony następującym związkiem:

$$\hat{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{H}_2(\mathbf{A}_2^T\mathbf{G}^{-1} - \mathbf{N}_{12}^T\mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{A}_1^T\mathbf{G}^{-1}) \times \mathbf{L} \quad (2.14)$$

Z uwagi na okoliczność, że współrzędne punktów osnow państwowych, biorących udział w procesie nawiązania, nigdy nie są korygowane o estymowane różniczki w formie wektora $\hat{\mathbf{X}}_1$, stąd ich wartości będą tylko wykorzystane do estymacji odchylek losowych dla wielkości obserwowanych w konstrukcji nawiązania. Jeżeli estymowane różniczki do przybliżonych współrzędnych punktów osnowy realizacyjnej, reprezentowane przez wektor $\hat{\mathbf{X}}_2$, dodamy do przybliżonych współrzędnych punktów, ustalonych na etapie zestawiania równań obserwacyjnych, to otrzymujemy najbardziej prawdopodobne współrzędne tych punktów w układzie państwowym. Bardzo ważnym zagadnieniem w prezentowanym procesie estymacji jest ocena niedokładności wektora $\hat{\mathbf{X}}_2$. Wariancja wektora $\hat{\mathbf{X}}_2$ może być zapisana w formie ogólnej definicji następującej postaci (Rao, 1982):

$$V(\hat{\mathbf{X}}_2) = E\{[\hat{\mathbf{X}}_2 - E(\hat{\mathbf{X}}_2)] \times [\hat{\mathbf{X}}_2 - E(\hat{\mathbf{X}}_2)]^T\} \quad (2.15)$$

Po wstawieniu do powyższej zależności wzoru na estymator wektora $\hat{\mathbf{X}}_2$, wariancja dla tego estymatora wyraża się związkiem:

$$V(\hat{\mathbf{X}}) = E\{[\mathbf{H}_2(\mathbf{A}_2^T\mathbf{G}^{-1} - \mathbf{N}_{12}^T\mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{A}_1^T\mathbf{G}^{-1}) \times \mathbf{L} - \mathbf{X}_2] \times [\mathbf{H}_2(\mathbf{A}_2^T\mathbf{G}^{-1} - \mathbf{N}_{12}^T\mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{A}_1^T\mathbf{G}^{-1}) \times \mathbf{L} - \mathbf{X}_2]^T\} \quad (2.16)$$

Jeżeli za wektor wyrazów wolnych \mathbf{L} zostanie podstawione wyrażenie zawierające macierze z procesu estymacji jako suma modelowych wartości wielkości obserwowanych ($\mathbf{A}_2\hat{\mathbf{X}}_2$) i odchyłek losowych δ , czyli ($\mathbf{L}=\mathbf{A}_2\hat{\mathbf{X}}_2+\delta$), wtedy po wykonaniu szeregu przekształceń, związek (2.16) przybierze następującą postać:

$$V(\hat{\mathbf{X}}_2) = Cov(\hat{\mathbf{X}}_2) = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{N}_2 - \mathbf{N}_{12}^T \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_{12})^{-1} \quad (2.17)$$

przy czym $\hat{\sigma}_0^2$ oznacza współczynnik w postaci estymatora wariancji resztowej, uzyskany w procesie estymacji wektora $\hat{\mathbf{X}}_1$ i $\hat{\mathbf{X}}_2$. Wektor odchyłek losowych δ do estymowanego modelu liniowego (2.2) stanowi różnicę zaobserwowanych zmiennych losowych \mathbf{L} i jej wartości przeciętnej $\mathbf{E}(\mathbf{L}) = \mathbf{A}_1\hat{\mathbf{X}}_1 + \mathbf{A}_2\hat{\mathbf{X}}_2$ czyli

$$\hat{\delta} = \mathbf{L} - [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_1 \\ \hat{\mathbf{X}}_2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

stąd współczynnik wariacji resztowej w estymowanym modelu dla konstrukcji nawiazania wyraża się wzorem

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\delta}^T \mathbf{G}^{-1} \hat{\delta}}{n - k} \quad (2.19)$$

przy czym n oznacza liczbę obserwowanych elementów geodezyjnych w konstrukcji nawiazania, zaś k stanowi liczbę estymowanych współrzędnych punktów osnowy realizacyjnej, które wchodzi do konstrukcji nawiazania.

Kryteria nawiazania osnow realizacyjnych

Macierz \mathbf{G} będzie reprezentowała macierz wariancji wielkości obserwowanych (kątown i długości) niezależnie w geodezyjnej konstrukcji nawiazania, stąd będzie zawierała na głównej przekątnej tylko kwadraty średnich błędów pomiaru. Wartości tych błędów są ustalane na podstawie klasy dokładności przyrządów stosowanych do pomiaru długości i kątów w konstrukcji nawiazania. Macierz \mathbf{G} może być zapisana w następującej formie:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sigma_{d1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{di}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\beta 1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\beta i}^2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

W praktycznych rozwiązaniach średnie błędy dla pomiarów długościowych są przyjmowane na jednakowym poziomie σ_d a dla pomiarów kątowych na jednakowym poziomie σ_β . Macierz \mathbf{C} będzie reprezentowana przez macierz kowariancji dla współrzędnych punktów osnowy państwowej uwzględnianych w konstrukcji nawiazania. Macierz \mathbf{C} powinna pochodzić z wyrównania osnowy państwowej, stąd powinna być w następującej postaci:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma^2(x_1) & cov(x_1, y_1) & \dots & \dots & cov(x_1, x_m) & cov(x_1, y_m) \\ /- / & \sigma^2(y_1) & \dots & \dots & cov(y_1, x_m) & cov(y_1, y_m) \\ /- / & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ /- / & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ /- / & /- / & /- / & /- / & \sigma^2(x_m) & cov(x_m, y_m) \\ /- / & /- / & /- / & /- / & /- / & \sigma^2(y_m) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Jeżeli współrzędne punktów osnowy państwowej nie posiadają pełnej macierzy kowariancji, wtedy macierz \mathbf{C} powinna zawierać tylko elementy na głównej przekątnej, których wartości powinny odpowiadać kwadratowi średnich błędów wyznaczania współrzędnych tych punktów.

Macierze \mathbf{A}_1 i \mathbf{A}_2 stanowią wartości pochodnych cząstkowych elementów obserwowanych w konstrukcji nawiązania liczone względem współrzędnych punktów wchodzących do tej konstrukcji. Na podstawie wzorów (2.13) i (2.14) jest estymowany wektor niewiadomych, który zawiera różniczki dx_i, dy_i do współrzędnych punktów osnowy państwowej oraz różniczki

$d\bar{x}_i, d\bar{y}_i$ do przybliżonych współrzędnych punktów osnowy realizacyjnej. Zgodnie z obowiązującymi rozporządzeniami geodezyjnymi (dawniej instrukcjami), można przytoczyć określone kryteria dokładnościowe. Osnowy państwowe III klasy (wg. dawnej klasyfikacji) mają podaną charakterystykę dokładnościową w formie średniego błędu położenia punktu $\sigma_p = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \leq 10 \text{ cm}$. Dokładność osnowy realizacyjnej jest formułowana za pomocą średniego błędu długości boku, po ostatecznym wyrównaniu wyników obserwacji w tej osnowie. Wartość tego błędu, w zależności od ustalonej dokładności tyczenia punktów w terenie, nie może być większa od 5 cm (Czaja 1996). Do sformułowania kryteriów nawiązania osnow realizacyjnych do osnow państwowych, zostaną wykorzystane następujące estymatory wyznaczone z modelu (2.2): macierz kowariancji $Cov(\hat{\mathbf{X}}_2)$ dla współrzędnych punktów osnowy realizacyjnej wyznaczana według wzoru (2.17), oraz współczynnik wariancji $Cov(\hat{\mathbf{X}}_2)$ dla wielkości obserwowanych w konstrukcji nawiązania, określony za pomocą związku (2.19). Na podstawie wartości powyższych parametrów, można sformułować trzy sposoby estymacji ostatecznych współrzędnych punktów osnowy realizacyjnej w układzie państwowym. Kryteria określające sposób tej estymacji zostaną zdefiniowane za pomocą następujących parametrów:

- Maksymalnej wartości odchylenia standardowego $\sigma_{\max}(\hat{d}_i)$ dla dowolnej odległości d_i pomiędzy punktami osnowy realizacyjnej, wyliczona na podstawie macierzy $Cov(\hat{\mathbf{X}}_2)$.
- Współczynnika wariancji $\hat{\sigma}_0^2$ dla wielkości obserwowanych w konstrukcji nawiązania.
- Średniego błędu σ_d dla pomiarów długościowych przyjmowanego w macierzy \mathbf{G} .
- Kwantylu rozkładu Studenta t_α dla $(n - k)$ stopni swobody i $(1 - \alpha) = 0,95$ poziomu ufności, który przybiera następujące wartości:

n-k	1	2	3	4	5	6	7	...	10	20	30	...	100
t_α	12,7	4,3	3,2	2,8	2,6	2,4	2,4	...	2,2	2,1	2,0	...	2,0

I. Gdy odchylenia standardowe dla dowolnej odległości d_i pomiędzy punktami osnowy realizacyjnej spełniają nierówność:

$$\sigma_{\max}(\hat{d}_i) \leq t_\alpha \cdot \hat{\sigma} \cdot \sigma_d \quad (2.22)$$

wtedy do ostatecznej estymacji współrzędnych punktów osnowy realizacyjnej należy włączyć wszystkie elementy konstrukcji nawiązania.

II. Gdy dla dowolnej odległości d_i pomiędzy punktami osnowy realizacyjnej zachodzi nierówność:

$$t_\alpha \cdot \hat{\sigma} \cdot \sigma_d < \sigma_{\max}(\hat{d}_i) \leq 3 \cdot t_\alpha \cdot \hat{\sigma} \cdot \sigma_d \quad (2.23)$$

wtedy obserwacje z konstrukcji nawiązania nie powinny być włączane do ostatecznej estymacji współrzędnych punktów osnowy realizacyjnej. W takim przypadku, w ostatecznym wyrównaniu osnowy realizacyjnej powinny być uwzględnione estymowane poprawki do współrzędnych ($\hat{\mathbf{X}}_2$) oraz ich macierz $Cov(\hat{\mathbf{X}}_2)$.

III. Gdy dla dowolnej odległości d_i pomiędzy punktami osnowy realizacyjnej zachodzi nierówność:

$$\sigma_{\max}(\hat{d}_i) > 3 \cdot t_\alpha \cdot \hat{\sigma} \cdot \sigma_d \quad (2.24)$$

to oznacza, że wartość odchylenia standardowego odległości pomiędzy punktami osnowy realizacyjnej przekracza potrójną wartość niedokładności estymacji parametrów modelu w konstrukcji nawiązania. W takim przypadku nawiązanie osnowy realizacyjnej do układu współrzędnych państwowych powinno odbywać się na podstawie estymowanych współrzędnych dla jednego punktu osnowy państwowej i dla jednego punktu osnowy realizacyjnej. Takie nawiązanie osnowy realizacyjnej będzie wolne od wszelkich zniekształceń wyników pomiaru tej osnowy z tytułu dużej niedokładności wyznaczenia osnowy państwowej.

Oryginalne osiągnięcia zawarte w rozwinięciu tezy nr 2:

Wyprowadzone wzory na estymację parametrów w konstrukcji nawiązania, są podstawą do sformułowania trzech sposobów estymacji ostatecznych współrzędnych punktów osnowy realizacyjnej w układzie współrzędnych państwowych. Kryteria określające sposób tej estymacji zostały zdefiniowane za pomocą następujących parametrów: $Cov(\hat{\mathbf{X}}_2) \Rightarrow \sigma_{\max}(\hat{d}_i)$, $\hat{\sigma}_0^2$, σ_d i t_α .

Jeżeli zachodzi nierówność $\sigma_{\max}(\hat{d}_i) \leq t_\alpha \cdot \hat{\sigma} \cdot \sigma_d$, to do ostatecznej estymacji współrzędnych punktów osnowy realizacyjnej należy włączyć wszystkie elementy konstrukcji nawiązania.

Jeżeli estymowane parametry spełniają nierówność $t_\alpha \cdot \hat{\sigma} \cdot \sigma_d < \sigma_{\max}(\hat{d}_i) \leq 3 \cdot t_\alpha \cdot \hat{\sigma} \cdot \sigma_d$, wtedy w procesie nawiązania powinny być uwzględnione estymowane współrzędne punktów osnowy realizacyjnej ($\hat{\mathbf{X}}_2$) oraz ich macierz $Cov(\hat{\mathbf{X}}_2)$.

W przypadku, gdy dla dowolnej odległości d_i pomiędzy punktami osnowy realizacyjnej zachodzi nierówność $\sigma_{\max}(\hat{d}_i) > 3 \cdot t_\alpha \cdot \hat{\sigma} \cdot \sigma_d$, nawiązanie osnowy realizacyjnej do układu współrzędnych państwowych powinno odbywać się na podstawie estymowanych współrzędnych tylko dla jednego punktu osnowy państwowej i dla jednego punktu osnowy realizacyjnej.

Na zakończenie należy wyraźnie podkreślić, że proponowana klasyfikacja różnych rodzajów układów odniesienia dla sieci realizacyjnych ma praktyczne zastosowanie przy tyczeniu pojedynczych obiektów budowlanych lub zespołu obiektów na małych obszarach terenu, a także do wyznaczania w terenie punktów granicznych działek budowlanych.

Teza nr 3. Sformułowana na podstawie poz. [3]:

Wyznaczenie przemieszczeń punktów reprezentujących obiekty inżynierskie w obrębie ruchów górotworu powinno być prowadzone łącznie z pełną analizą wariancji. Zatem zachodzi konieczność uwzględnienia pełnej macierzy kowariancji, która będzie zawierała informacje o niedokładności wyznaczania współrzędnych punktów sieci odniesienia oraz o niedokładności pomiaru i określenia składowych przemieszczeń punktów obiektów inżynierskich. Analiza wariancji powinna wskazać, czy wyznaczone składowe przemieszczenia obserwowanych punktów mają charakter istotny z punktu widzenia niedokładności pomiaru sieci odniesienia i niedokładności okresowych obserwacji punktów badanych obiektów. W analizie wariancji powinna być również uwzględniona procedura określania translacji i rotacji dla całego obiektu jako bryły sztywnej.

Sformułowanie problemu badawczego dotyczącego tezy nr 3

Do określania przemieszczeń punktów reprezentujących powierzchnię terenu lub obiekty inżynierskie w obrębie górotworu zasadnicze znaczenie ma sieć punktów geodezyjnych, którą mogą stanowić punkty osnowy podstawowej lub szczegółowej. W pierwszej części pracy została przedstawiona propozycja dotyczące wskaźnika globalnej niedokładności wyznaczenia sieci punktów odniesienia, których współrzędne będą estymowane według wieloparametrowego modelu Gaussa-Markowa. Na podstawie takiego wskaźnika można prowadzić analizy dotyczące doboru optymalnej struktury obserwacji w sieciach geodezyjnych ukierunkowane na ustalanie układu odniesienia, oraz na wyznaczenie przemieszczeń punktów w tych sieciach. Na etapie projektowania sieci punktów odniesienia duże znaczenie ma odpowiedni dobór elementów w tej sieci, które powinny być przedmiotem pomiarów geodezyjnych. W rozwiązaniach tych powinny być uwzględnione nowoczesne przyrządy pomiarowe w postaci tachimetrów elektronicznych i odbiorników GPS, optymalna liczba obserwacji możliwych do wykonania, oraz odpowiednia dokładność estymacji współrzędnych punktów sieci punktów odniesienia. Optymalizacja w zakresie wyznaczania współrzędnych punktów sieci odniesienia ma na celu zminimalizować ilość prac pomiarowych w terenie oraz wybór odpowiedniego sprzętu i elementów do pomiaru, które zapewnią wymaganą dokładność określenia współrzędnych punktów w tej sieci, por. poz. (Hejmanowski I in.2012), (Krawczyk 2012), (Maciaszek 2012) i (Prószyński, Kwaśniak 2006). Do oceny dokładności sieci punktów odniesienia można stosować wskaźniki lokalne, czyli macierz kowariancji dla każdego punktu lub macierz kowariancji dla wybranych elementów sieci, albo wskaźniki globalne, które będą odniesione jednocześnie do macierzy kowariancji wszystkich punktów wyznaczonej sieci, por. poz. (Czaja 1996), (Rao 1982) i (Wiśniewski 2000). W dalszej części pracy zostały przedstawione zasady wyznaczania przemieszczeń punktów reprezentujących obiekty inżynierskie posadowione w obrębie ruchów górotworu wraz z pełną analizą wariancji. Na podstawie tak wyznaczonych przemieszczeń punktów został podany algorytm na estymację składowych translacji i rotacji oraz jednorodnych odkształceń badanych obiektów inżynierskich. Pełna analiza wariancji dla wyznaczanych przemieszczeń punktów pozwoliła sformułować kryterium do ustalenia istotności estymowanych parametrów określających translację i rotację oraz składowe jednorodnych (przeciętnych) odkształceń badanych obiektów, por. poz. (Jaśkowski 2012), (Kowalski 2007), (Niedojadło 2012), (Ostrowski 2006) i (Popiołek 2009).

Kryterium sformułowane w pracy za pomocą nierówności wynika z pełnej analizy wariancji wszystkich etapów pomiaru i obliczeń, dotyczących wyznaczania współrzędnych punktów sieci odniesienia, wyznaczania współrzędnych punktów na badanym obiekcie, określania przemieszczeń punktów reprezentujących badany obiekt, oraz geometrycznej interpretacji wektorowego pola przemieszczeń, która prowadzi do określenia składowych translacji i rotacji oraz jednorodnych odkształceń badanych obiektów. Rozważania te, zdaniem autora, stanowią istotne osiągnięcie w zakresie badania przemieszczeń i odkształceń obiektów inżynierskich posadowionych w obrębie górotworu.

Omówienie wyników badań związanych z rozwinięciem tezy nr 3

Estymacja współrzędnych punktów w sieciach odniesienia oraz ich macierzy kowariancji

Estymacje współrzędnych punktów odniesienia najwygodniej wykonać za pomocą parametrycznego modelu Gaussa – Markowa, dla którego przyjmowane są następujące założenia. Niech obserwacje L_1, L_2, \dots, L_n reprezentujące kąty poziome i pionowe oraz długości boków określone przez punkty sieci odniesienia, a także współrzędne punktu w ustalonym układzie określone za pomocą GPS, których niedokładność jest zdefiniowana za pomocą przekątniowej macierzy wariancji \mathbf{G} . Liniowy model dla estymowanych parametrów zmiennych losowych, reprezentowanych przez współrzędne punktów sieci odniesienia można zapisać w następującej formie macierzowej, por. poz. (Strzałkowski 2012):

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \boldsymbol{\delta}; \quad E[\mathbf{L}] = \mathbf{A}\mathbf{X}; \quad V[\mathbf{L}] = \sigma^2\mathbf{G}; \quad \det \mathbf{G} \neq 0; \quad \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{P} \quad (3.1)$$

gdzie:

\mathbf{L} - wektor zredukowanych wielkości obserwowanych, czyli wyrazów wolnych o wymiarze $(n \times 1)$,

\mathbf{A} - macierz znanych współczynników równań obserwacyjnych dla pomierzonych kątów poziomych i pionowych oraz długości boków, a także współrzędne punktu w ustalonym układzie, o wymiarze $(n \times k)$,

\mathbf{X} - wektor niewiadomych (poprawek $d\mathbf{x}$ do przybliżonych współrzędnych punktów sieci odniesienia o wymiarze $(k \times 1)$,

\mathbf{G} - przekątniowa macierz wariancji dla elementów obserwowanych o wymiarze $(n \times n)$,

$\boldsymbol{\delta}$ - wektor odchyłek losowych δ_i do wielkości obserwowanych o wymiarze $(n \times 1)$,

σ^2 - wariancja składnika losowego δ_i w przyjętym modelu,

Rozwiązanie układu równań (3.1), zgodnie z metodą najmniejszej sumy kwadratów (MNK), można zapisać w postaci, por. poz. (Czaja 1996):

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \quad (3.2)$$

Wzór (3.2) określa nieobciążony estymator wektora \mathbf{X} , zatem macierz kowariancji tego wektora wyraża się następującą zależnością:

$$\text{Cov}[\hat{\mathbf{X}}] = \hat{\sigma}^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{C} \quad (3.3)$$

Estymator wariancji $\hat{\sigma}^2$ składnika losowego δ wyznacza się na podstawie następującego wzoru:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{L} - \hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}}{n - k} \quad (3.4)$$

przy czym $k = R(\mathbf{A})$, czyli odpowiada rzędowi macierzy $R(\mathbf{A})$.

Macierz kowariancji (3.3) opisuje niedokładność wyznaczenia każdego punktu sieci odniesienia względem początku układu współrzędnych przyjętego do estymacji wektora \mathbf{X} , który określa poprawki do przybliżonych współrzędnych punktów tej sieci. Elementy na przekątnej macierzy \mathbf{C} stanowią wariancje poszczególnych współrzędnych punktów estymowanych według zależności (3.2), stąd dla różnych punktów sieci odniesienia mogą występować różne wartości wariancji ich współrzędnych.

Graniczna wartość średniego błędu wyznaczenia współrzędnej punktów sieci odniesienia (M_G) powinna być odniesiona do całej macierzy kowariancji $\text{Cov}[\hat{\mathbf{X}}]$ zdefiniowanej wzorem (3.3) i (3.4). Jeżeli przyjmiemy, że estymacja przedziału ufności dla współrzędnej dowolnego punktu ma być na poziomie $1 - \alpha = 0,987$, wtedy formuła na określenie M_G powinna być następująca:

$$M_G = 3 \times \sqrt[2n]{\det[\text{Cov}[\hat{\mathbf{X}}]]} \quad (3.5)$$

przy czym n oznacza liczbę estymowanych współrzędnych punktów analizowanej sieci odniesienia. Jeżeli będzie ustalona graniczna wartość średniego błędu wyznaczenia współrzędnych punktów, to formuła (3.5) może być również zastosowana do sformułowania kryterium doboru odpowiedniej konstrukcji i dokładności pomiaru elementów sieci punktów odniesienia, czyli kryterium niezawodności sieci. W tym celu zostanie zapisany warunek jaki musi spełniać macierz kowariancji dla estymowanych współrzędnych punktów sieci odniesienia, czyli

$$\det[\text{Cov}[\hat{\mathbf{X}}]] \leq \frac{(M_G)^{2n}}{3} \quad (3.6)$$

Z nierówności (3.6) wynika ważne ogólne stwierdzenie, żeby średnie błędy współrzędnych punktów sieci odniesienia do wyznaczania przemieszczeń punktów reprezentujących obiekty inżynierskie na powierzchni terenu były mniejsze od wartości granicznej M_G , sieć punktów odniesienia powinna być tak skonstruowana i pomierzona aby wyznacznik z jej macierzy kowariancji $\text{Cov}[\hat{\mathbf{X}}]$ był mniejszy lub równy wartości $1/3 (M_G)^{2n}$. Układ odniesienia do wyznaczania przemieszczeń punktów reprezentujących powierzchnię terenu jest realizowany w terenie przez sieć punktów odniesienia, w której obserwowane elementy kąto-długościowe w pomiarze wyjściowym, pozwalają wyznaczyć współrzędne w jednolitym układzie. Położenie tych punktów względem siebie jest weryfikowane za pomocą analogicznych pomiarów następnym zwanych pomiarami okresowymi sieci punktów odniesienia. Punkty sieci odniesienia, które zachowują pierwotne położenie względem siebie i otoczenia, definiują układ odniesienia, zaś punkty wykazujące istotne przemieszczenia określają deformacje powierzchni terenu.

Przemieszczenia punktów reprezentujących powierzchnię terenu wyznaczone w stałych układach odniesienia będą stanowiły przemieszczenia bezwzględne tych punktów. Składowe wektorów bezwzględnych przemieszczeń powinny podlegać weryfikacji dotyczącej istotności ich wartości. Jako kryterium istotności wyznaczenia składowych wektora bezwzględnych przemieszczeń (U_x, U_y, U_z) punktów reprezentujących powierzchnię terenu można zaproponować następującą nierówność:

$$U_i \geq M_G \quad (3.7)$$

Jeżeli nierówność (3.7) nie będzie spełniona, wtedy można uznać, że wyznaczone przemieszczenia punktów reprezentujących powierzchnię terenu są określone w granicach niedokładności pomiarów geodezyjnych.

Określanie przemieszczeń punktów reprezentujących obiekty inżynierskie

Pod pojęciem wyznaczanie przemieszczeń punktów rozumiemy całokształt prac projektowych, pomiarowych i obliczeniowych, związanych z określeniem wektorów zmiany położenia obserwowanych punktów, reprezentujących badany obiekt inżynierski. Wyznaczenie przemieszczeń badanego obiektu inżynierskiego, w ustalonym interwale czasu, wymaga obserwacji wybranych

punktów tego obiektu na początku i na końcu tego interwału. Każdy pomiar okresowy jest wykonywany w nawiązaniu do zweryfikowanej sieci punktów odniesienia i obejmuje obserwacje długości i kątów elementów określonych przez punkty sieci odniesienia i punkty reprezentujące badane obiekty inżynierskie na powierzchni terenu. Porównując wyniki pomiaru wyjściowego i pomiaru aktualnego, określimy przemieszczenia punktów badanego obiektu inżynierskiego. Tak wyznaczone przemieszczenia punktów mają charakter bezwzględny. Przemieszczenia bezwzględne informują nie tylko o przesunięciu i brocie całego obiektu jako bryły sztywnej względem sieci punktów odniesienia, ale również o wzajemnych zmianach położenia punktów, czyli o deformacjach badanego obiektu, por. poz. (Jaśkowski 2012), (Sopata 2012), (Paulewicz 2012). Wyznaczone według wzoru (3.2) współrzędne punktów sieci odniesienia i zweryfikowane dokładnie według nierówności (3.6) jednoznacznie definiują układ odniesienia, względem którego okresowo obserwuje się punkty reprezentujące obiekty inżynierskie posadowione na powierzchni terenu. Na niedokładność wyznaczenia współrzędnych punktów reprezentujących badane obiekty ma bezpośredni wpływ niedokładność okresowych pomiarów kąto – długościowych oraz pośredni wpływ niedokładność określenia współrzędnych punktów sieci odniesienia zawartą w macierzy kowariancji zdefiniowanej wzorem (3.3), która powstała w wyniku optymalizacji pomiaru tej sieci. Każdy okresowy pomiar punktów reprezentujących badany obiekt powinien być poddany niezależnej estymacji według modelu przedstawionego w punkcie 3.2. W modelu tym trzeba do macierzy równań obserwacji dołożyć podmacierz zawierającą jedynki na przekątnej, odpowiadające współrzędnym punktów odniesienia, z których zostały wykonane obserwacje do punktów reprezentujących obiekty inżynierskie posadowione na powierzchni terenu. Zatem, zamiast macierzy \mathbf{A} będzie uwzględniana blokowa macierz $\boldsymbol{\alpha}$, która będzie zawierała macierz \mathbf{a} równań obserwacyjnych dla elementów obserwowanych w pomiarze okresowym oraz macierz jednostkową \mathbf{I} reprezentującą równania dla wtórnych obserwacji współrzędnych punktów odniesienia, następującej postaci:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Macierzy \mathbf{G} będzie odpowiadać blokowa macierz $\boldsymbol{\gamma}$, która powinna się składać z macierzy \mathbf{g} zawierającej wariancje dla obserwowanych wielkości w pomiarze okresowym oraz z macierzy \mathbf{c} , składającej się z wybranych elementów macierzy kowariancji (3.3) dla punktów odniesienia, z których był wykonywany pomiar okresowy, czyli:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Z powyższego wzoru widać, że na wartości wyznaczanych współrzędnych punktów badanych obiektów inżynierskich ma bezpośredni wpływ niedokładność okresowych pomiarów kąto – długościowych oraz elementy macierzy kowariancji określone dla sieci punktów odniesienia. Najbardziej prawdopodobne wartości współrzędnych punktów reprezentujących obiekty inżynierskie posadowione na powierzchni terenu, w każdym okresowym pomiarze powinny być wyznaczone według wzoru podobnego do wzoru (3.2), czyli:

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{X}}_s \end{Bmatrix} = (\mathbf{a}^T \times \boldsymbol{\gamma}^{-1} \times \mathbf{a})^{-1} \times \mathbf{a}^T \times \boldsymbol{\gamma}^{-1} \times \mathbf{l} \quad (3.10)$$

gdzie:

$\hat{\mathbf{x}}$ - wektor estymowanych poprawek do przybliżonych współrzędnych punktów reprezentujących badane obiekty w okresowych pomiarach,

- $\hat{\mathbf{X}}_s$ - wektor estymowanych poprawek do współrzędnych punktów sieci odniesienia w okresowym pomiarze,
 \mathbf{I} - oznacza macierz wyrazów wolnych dla wielkości obserwowanych w pomiarze okresowym.

Wektor określony wzorem (3.10) zawiera estymowane MNK poprawki do przybliżonych współrzędnych punktów reprezentujących badany obiekt w okresowym pomiarze oraz zanedbywalnie małe poprawki do współrzędnych punktów sieci odniesienia, z których był wykonany pomiar okresowy.

Macierz kowariancji dla wektora estymowanych w każdym okresowym pomiarze współrzędnych punktów (4.9) wyraża się zależnością:

$$\text{Cov} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{X}}_s \end{Bmatrix} = \hat{\sigma}^2 (\mathbf{a}^T \times \boldsymbol{\gamma}^{-1} \times \mathbf{a})^{-1} = \begin{Bmatrix} \text{Cov}\{\hat{\mathbf{x}}\} & \text{Cov}\{\hat{\mathbf{x}}; \hat{\mathbf{X}}_s\} \\ \text{Cov}\{\hat{\mathbf{x}}; \hat{\mathbf{X}}_s\} & \text{Cov}\{\hat{\mathbf{X}}_s\} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

przy czym nieobciążony estymator wariancji $\hat{\sigma}^2$ składnika losowego δ wyznacza się na podstawie wzoru

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\gamma}^{-1} \mathbf{1} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{a}^T \boldsymbol{\gamma}^{-1} \mathbf{1}}{n - u} \quad (3.12)$$

gdzie:

- $(n - u)$ - oznacza ilość nadliczbowych obserwacji w pomiarze okresowym
 $\text{Cov}[\hat{\mathbf{x}}]$ - macierz kowariancji wyznaczanych współrzędnych punktów reprezentujących badany obiekt w pomiarze okresowym.
 $\text{Cov}[\hat{\mathbf{X}}_s]$ - macierz kowariancji skorygowanych współrzędnych punktów sieci odniesienia,
 $\text{Cov}[\hat{\mathbf{x}}; \hat{\mathbf{X}}_s]$ - macierz kowariancji współrzędnych punktów obserwowanych w pomiarze okresowym względem współrzędnych punktów sieci odniesienia.

Na podstawie wzorów (3.9) i (3.10) bezpośrednio widać, że optymalizacja sieci punktów odniesienia za pomocą wskaźnika globalnego (3.6), przy uwzględnieniu wyznacznika z macierzy $\text{Cov}[\hat{\mathbf{X}}]$ ma bezpośredni wpływ na wartość wyznaczanych współrzędnych punktów reprezentujących obiekty inżynierskie posadowione na powierzchni terenu oraz na niedokładność tych współrzędnych. Różnice współrzędnych punktów reprezentujących obiekty inżynierskie posadowione na powierzchni terenu, z dwóch okresowych pomiarów oznaczonych wskaźnikami 1 i 2, określają składowe bezwzględnych przemieszczeń tych punktów, czyli

$$\Delta \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1 \quad (3.13)$$

Z uwagi na niezależność okresowych pomiarów macierz kowariancji dla wyznaczanych przemieszczeń punktów powinna być określana według wzoru

$$\text{Cov}[\Delta \mathbf{x}] = \text{Cov}[\hat{\mathbf{x}}_2] + \text{Cov}[\hat{\mathbf{x}}_1] \quad (3.14)$$

Macierz kowariancji (3.14) zawiera pełną informację o niedokładności wyznaczenia składowych wektorów przemieszczeń punktów reprezentujących badany obiekt inżynierski a wartości jej elementów bezpośrednio zależą od wartości elementów macierzy $\text{Cov}[\hat{\mathbf{X}}]$ dla sieci punktów odniesienia oraz od wartości elementów macierzy $\text{Cov}[\hat{\mathbf{x}}]$ dla obserwowanych punktów na badanym inżynierskim. Elementy macierzy (3.14) zostaną wykorzystane do sformułowania podstawowego kryterium, które będzie rozstrzygało, czy wyznaczone składowe

translacji i rotacji oraz stanu odkształcenia obiektu inżynierskiego mają charakter istotny z punktu widzenia niedokładności pomiarów geodezyjnych.

Geometryczna interpretacja przemieszczeń punktów reprezentujących obiekty inżynierskie

Współrzędne punktów badanego obiektu, wyznaczone w dwóch pomiarach okresowych, określają chwilowe położenie tych punktów. Zmiany położenia obserwowanych punktów wzdłuż odpowiednich kierunków będą określone przez różnice współrzędnych, czyli

$$\begin{aligned} u_x &= x_2 - x_1 \\ u_y &= y_2 - y_1 \\ u_z &= z_2 - z_1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

gdzie:

x_1, y_1, z_1 - współrzędne punktów w pomiarze wyjściowym (pierwszym),

x_2, y_2, z_2 - współrzędne punktów w pomiarze aktualnym (drugim).

Określone wzorem (3.15) różnice współrzędnych punktu wyznaczają składowe wektora przemieszczenia tego punktu, czyli $\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z$.

Jeżeli w chwilach wykonywania pomiarów geodezyjnych układ odniesienia zachowuje stałe położenie względem nieruchomego otoczenia, to wyznaczone składowe wektora przemieszczenia punktu mają charakter bezwzględny. Aby na podstawie zaobserwowanych bezwzględnych przemieszczeń punktów odtworzyć zmianę położenia i deformacje obiektu, trzeba ustalić matematyczny model zmian przemieszczeń punktów, a tym samym model deformacji obiektu. Model taki powinien wynikać z wartości zaobserwowanych przemieszczeń punktów oraz z rodzaju obiektu. Przez rodzaj obiektu rozumiemy tutaj kształt, własności materiału i sposób przenoszenia obciążeń. Model zmian przemieszczeń punktów może być ustalony za pomocą funkcji matematycznej dla całego obiektu, lub dla poszczególnych fragmentów obiektu.

Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami, każdy punkt wybrany na obiekcie i okresowo obserwowany będzie miał wyznaczony wektor \vec{u} przemieszczeń w postaci składowych u_x, u_y, u_z . Jeżeli wektory te zaczepimy w punktach obiektu zajmującego pierwotne położenie (w konfiguracji pierwotnej), to końce tych wektorów określają położenie tych punktów zaobserwowane w pomiarze aktualnym (w konfiguracji aktualnej). Postępowanie takie prowadzi do określenia punktowego zbioru wektorów przemieszczeń.

W aspekcie analizy przemieszczeń i deformacji całego obiektu, dążymy do tego, aby na podstawie punktowego zbioru wektorów przemieszczeń określić zbiór ciągły wektorów przemieszczeń, zwany dalej wektorowym polem przemieszczeń. Geometryczna interpretacja wektorowego pola przemieszczeń punktów reprezentujących badany obiekt inżynierski prowadzi do określenia translacji i rotacji obiektu jako bryły sztywnej oraz do wyznaczenia składowych odkształceń tego obiektu. W przypadku rozpatrywania translacji i rotacji (obrotu) obiektu jako bryły sztywnej oraz jednorodnego (przeciętnego) stanu odkształceń, składowe (4.14) wektorów przemieszczeń można zapisać jako funkcje liniowe tych parametrów w następującej postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u_{x0} \\ u_{y0} \\ u_{z0} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & \omega_{xy} & -\omega_{zx} \\ -\omega_{xy} & 0 & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & -\omega_{yz} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix}^T \quad (3.16)$$

gdzie:

- $[u_{x0}, u_{y0}, u_{z0}]$ - oznaczają składowe translacji obiektu jako bryły sztywnej, czyli jego równoległego przesunięcia wzdłuż osi Ox, Oy i Oz przyjętego układu współrzędnych,
- $[x, y, z]$ - oznaczają współrzędne rozważanego punktu o wyznaczonych przemieszczeniach w pomiarze wyjściowym,
- $[\omega_{xy}, \omega_{yz}, \omega_{zx}]$ - oznaczają składowe rotacji obiektu jako bryły sztywnej, czyli obroty (nachylenia) w poszczególnych płaszczyznach współrzędnych Oxy, Oyz i Ozx przyjętego układu odniesienia,
- $[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z]$ - oznaczają składowe jednorodnych (przeciętnych) odkształceń linowych wzdłuż osi Ox, Oy i Oz przyjętego układu współrzędnych.
- $[\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]$ - oznaczają składowe jednorodnych odkształceń postaciowych w płaszczyznach współrzędnych Oxy, Oyz i Ozx przyjętego układu odniesienia,
- $[\delta_x, \delta_y, \delta_z]$ - odchyłki losowe do ustalonego modelu przemieszczeń punktów reprezentujących badany obiekt inżynierski.

Występujące we wzorze (3.16) odchyłki losowe $[\delta_x, \delta_y, \delta_z]$ opisują przemieszczenia punktów z tytułu odkształceń niejednorodnych oraz skręceń i ugięć badanych obiektów inżynierskich, a także z tytułu niedokładności pomiarów geodezyjnych. Model przemieszczeń punktów (3.16) zapisany w formie analitycznej przyjmuje układ trzech równań następującej postaci:

$$\begin{aligned} -\delta_x &= u_{x0} - \omega_{xy}y + \omega_{zx}z + \varepsilon_{xy}x + \gamma_{xy}y + \gamma_{zx}z - u_x \\ -\delta_y &= u_{y0} - \omega_{xy}y - \omega_{yz}z + \gamma_{xy}x + \varepsilon_y y + \gamma_{yz}z - u_y \\ -\delta_z &= u_{z0} + \omega_{zx}x + \omega_{yz}y + \gamma_{zx}x + \gamma_{yz}y + \varepsilon_z z - u_z \end{aligned} \quad (3.17)$$

Układ równań (3.17) zawiera 12 estymowanych parametrów, czyli 3 składowe translacji, 3 składowe rotacji oraz 6 składowych stanu odkształcenia jednorodnego. Do estymacji tych parametrów trzeba zestawiać równania postaci (3.17) dla co najmniej 5 punktów reprezentujących badany obiekt inżynierski i rozwiązać układ równań aproksymujących dla $n > 12$, metodą najmniejszych kwadratów.

$$\delta_u + \mathbf{K} \times \mathbf{TRO} = \mathbf{u} \quad (3.18)$$

gdzie:

- δ_u - jednokolumnowa macierz odchyłek losowych do zaobserwowanych przemieszczeń punktów na obiekcie inżynierskim, której liczba wierszy odpowiada liczbie równań aproksymacyjnych, czyli liczbie rozpatrywanych składowych przemieszczeń punktów na obiekcie inżynierskim,
- \mathbf{K} - macierz kształtu obiektu zdefiniowana przez współczynniki występujące przy estymowanych parametrach w układzie równań postaci (3.17), której liczba wierszy
- \mathbf{TRO} - macierz jednokolumnowa składowych translacji, rotacji i odkształceń jednorodnych, której liczba wierszy wynosi 12,
- \mathbf{u} - jednokolumnowa macierz złożona z bezwzględnych przemieszczeń rozpatrywanych punktów na obiekcie inżynierskim, której liczba wierszy odpowiada liczbie równań aproksymacyjnych.

Wykorzystując parametryczny model estymacji w formie zależności (3.2) składowe translacji i rotacji oraz jednorodnych odkształceń można określić według następującego wzoru:

$$\mathbf{TRO} = \left[\mathbf{K}^T \times (\text{Cov}\mathbf{u})^{-1} \times \mathbf{K} \right]^{-1} \times \mathbf{K}^T \times (\text{Cov}\mathbf{u})^{-1} \times \mathbf{u} \quad (3.19)$$

przy czym $\text{Cov}[\mathbf{u}] = \text{Cov}[\Delta\mathbf{x}]$ oznacza macierz kowariancji dla bezwzględnych przemieszczeń punktów zdefiniowaną wzorem (3.14).

Macierz kowariancji dla składowych translacji i rotacji oraz jednorodnych odkształceń wyraża

$$\text{Cov}\mathbf{TRO} = \mathbf{K} \times \left[\mathbf{K}^T \times (\text{Cov}\mathbf{u})^{-1} \times \mathbf{K} \right]^{-1} \times \mathbf{K}^T \quad (3.20)$$

Elementy na przekątnej macierzy (3.20) stanowią wariancje $\sigma^2[\mathbf{TRO}]$ wyznaczanych składowych translacji i rotacji oraz jednorodnych odkształceń, stąd ich wartości mogą być podstawą do określenia istotności przemieszczeń i odkształceń badanego obiektu inżynierskiego. Jako kryterium istotności wyznaczonych składowych translacji i rotacji oraz jednorodnych odkształceń (3.19) proponuje się przyjąć nierówności, w których bezwzględna wartość tych składowych powinna być dwukrotnie większe od ich odchyłeń standardowych określonych na podstawie macierzy kowariancji (3.20), czyli:

$$|\mathbf{TRO}| > 2 \times \sigma[\mathbf{TRO}] \quad (3.21)$$

Nierówność (3.21) realizuje przedziałowe wartości poszczególnych składowych translacji i rotacji oraz jednorodnych odkształceń na poziomie prawdopodobieństwa $P=0,95$.

Oryginalne osiągnięcia tezy 3

Jako merytoryczny osiągnięcie w tej pracy można uznać propozycję dotyczącą wskaźnika globalnej niedokładności wyznaczenia sieci punktów odniesienia, których współrzędne są estymowane według wieloparametrowego modelu Gaussa-Markowa. Wskaźnik ten można wykorzystać do optymalizacji struktury obserwacji w sieciach odniesienia, które są podstawą do wyznaczenia przemieszczeń punktów w tych sieciach. Zaproponowany globalny wskaźnik niedokładności wyznaczenia sieci punktów odniesienia może być również wykorzystany do stwierdzenia, czy wyznaczone składowe wektorów przemieszczeń punktów reprezentujących powierzchnię terenu mają charakter istotny, czy mieszczą się w granicach niedokładności ich wyznaczenia.

Istotnym osiągnięciem naukowym w tej pracy są zasady i wzory wyznaczania przemieszczeń punktów reprezentujących obiekty inżynierskie posadowione w na powierzchni terenu wraz z pełną analiza wariancji, a także algorytm na estymacje składowych translacji i rotacji oraz jednorodnych odkształceń badanych obiektów. Pełna analiza wariancji dla wyznaczanych przemieszczeń punktów pozwoliła sformułować kryterium do ustalenia istotności estymowanych parametrów określających translację i rotację oraz składowych jednorodnych odkształceń badanych obiektów.

Omówienie wyników rozważań przedstawionych w poz. [4], czyli w książce pt. „Zagadnienia geodezji inżynierskiej dotyczące inwestycji drogowych”

Zakres tematyczny i układ niniejszej książki w istotny sposób odbiega od dotychczasowych podręczników, gdyż znaczna część rozważań dotyczy podstaw prawnych geodezyjnej obsługi inwestycji drogowych, które warunkują zastosowanie odpowiednich metod i przyrządów pomiarowych oraz opracowań kartometrycznych. Wszystkie prace geodety związane z przygotowaniem, realizacją i oddaniem do użytkowania obiektu budowlanego określa się, jako geodezyjną obsługę inwestycji. W zakresie geodezyjnej obsługi inwestycji jest szeroka literatura w formie podręczników akademickich oraz publikacji w obiegu krajowym i zagranicznym. Z uwagi na zmieniające się przepisy formalno-prawne dotyczące realizacji inwestycji oraz postępu technicznego w zakresie maszyn budowlanych i aparatury pomiarowej wiele z tych publikacji częściowo straciło na swojej aktualności. Podstawy teoretyczne do niniejszej książki zawarto w pozycjach [1], [2], [3] i [5].

W rozdziale 2 zostały przedstawione etapy realizacji procesu inwestycyjnego, ze szczególnym uwzględnieniem podstaw prawnych w przygotowaniu i realizacji inwestycji oraz udziału geodety w tych przedsięwzięciach. Wiele uwagi poświęcono podkladom mapowym dla celów projektowych i analizie dokumentacji projektowej, która prowadzi do uzyskania decyzji *pozwolenia na budowę*. Wszystkie rozważane elementy mają swoje odbicie w przedstawionych przepisach prawnych regulujących proces inwestycyjny.

Rozdział 3 ujmuje wszystkie czynności związane z zakładaniem osnów realizacyjnych, czyli poczynając od jej projektu, stabilizacji punktów i kryteriów dokładności pomiaru, aż do wyrównania wyników obserwacji geodezyjnych, prowadzących do ostatecznych współrzędnych punktów i ich oceny niedokładności. W ramach tego rozdziału autor przedstawił weryfikację własnej propozycji, opisaną w pozycji [5], globalnej oceny niedokładności wyznaczania współrzędnych punktów w osnowach realizacyjnych, którą zilustrował na przykładzie analizy wyników pomiaru doświadczalnej sieci geodezyjnej założonej na terenie PWSTE w Jarosławiu przedstawioną na rys. 1.

globalną niedokładność na poziomie $\theta = 3.6 \times 10^{-6}$, co w interpretacji geometrycznej oznacza względną niedokładność wyznaczenia odległości pomiędzy dowolnymi punktami tej sieci. Dla średniej długości boku tej sieci 92 m globalna niedokładność wyznaczenia takiej długości jest na poziomie 0,33 mm. Pomiar wszystkich długości boków sieci według II wariantu pozwala uzyskać globalną niedokładność wyznaczenia współrzędnych punktów rozważanej sieci na poziomie $\theta = 4,48 \times 10^{-6}$, co w przeliczeniu na średnią długość boku 92 m w tej sieci daje 0,41 mm.

W końcowej części tego rozdziału autor poddał weryfikacji własną propozycję optymalizacji wyznaczania osnów realizacyjnych w aspekcie dokładności tyczenia obiektów inżynierskich. Proponowany algorytm optymalizacji został zilustrowany na przykładzie tej samej doświadczalnej sieci geodezyjnej założonej na terenie PWSTE w Jarosławiu, której elementy były mierzone w czterech wariantach. Dla każdego wariantu pomiaru sieci geodezyjnej została określona graniczna wartość tolerancji budowlanej, która może być zachowana przy tyczeniu obiektów budowlanych z punktów rozważanej sieci.

W rozdziale 4 została przedstawione wszystkie czynności geodezyjne związane z geodezyjną obsługą budowy obiektów inżynierskich składających się na trasy drogowe. Świadomie w tym rozdziale zrezygnowano z opracowań geodezyjnych dotyczących projektowania tras drogowych w formie krzywych przejściowych i łuków kołowych, gdyż te zagadnienia są na wysokim poziomie przedstawione w istniejących podręcznikach i publikacjach naukowych, a w szczególności w pracach prof. R. Grabowskiego. Znaczna część rozważań w tym rozdziale obejmuje geodezyjną obsługę budowy mostów i infrastruktury drogowej.

Rozdział 5 poświęcony jest geodezyjnej obsłudze prac związanych z kształtowaniem korpusu drogi. Szczegółowo przedstawiono trzy metody tej obsługi: metodę wizualną, metodę systemów pomiarowych i metodę systemów sterowania maszyn do budowy korpusu drogi. W drugiej części tego rozdziału przedstawiono metody geodezyjnej inwentaryzacji powykonawczej obiektów inżynierskich składających się na trasę drogową. Rozważano zakres inwentaryzacji, sposoby jej wykonania oraz analityczne i graficzne formy jej opracowania.

W rozdziale 6 przedstawiono teoretyczne uwarunkowania pomiarów przemieszczeń i odkształceń obiektów inżynierskich składających się na trasę drogową.

Omawiana pozycja książkowa stanowi bardzo pomocny podręcznik w nauczaniu studentów na kierunku geodezja i kartografia z przedmiotu „geodezja inżynierska”.

Teza nr 5. Sformułowana na podstawie poz. [5]:

Do projektowania i pomiaru sieci punktów geodezyjnych wskazane jest zdefiniowanie globalnych wskaźników niedokładności wyznaczania współrzędnych punktów tych sieci, które będą nazywane wskaźnikami globalnej mocy sieci. W definicji globalnego wskaźnika mocy sieci geodezyjnej powinny być uwzględniane warunki geometryczne nakładane na współrzędne punktów tych sieci oraz ich macierze kowariancji. Dla sieci geodezyjnych w formie otwartych poligonów (liniowych) powinny być uwzględniane warunki funkcyjne nakładane na współrzędne oraz na azymuty dla punktów nawiązania. Dla sieci punktów geodezyjnych o charakterze powierzchniowym analiza wariancji powinna opierać się na wskaźniku opisującym geometrię tej sieci. Jednym z takich wskaźników może być parametr zdefiniowany za pomocą momentów centralnych dla współrzędnych wszystkich punktów rozpatrywanej sieci.

Sformułowanie problemu badawczego dotyczącego tezy nr 5

Do oceny dokładności sieci punktów odniesienia można stosować wskaźniki lokalne, czyli macierz kowariancji dla każdego punktu lub macierz kowariancji dla wybranych elementów sieci, albo wskaźniki globalne, które będą odniesione jednocześnie do macierzy kowariancji wszystkich punktów wyznaczanej sieci punktów odniesienia.

W niniejszej pracy zostaną przedstawione autorskie propozycje dotyczące globalnej oceny niedokładności sieci punktów odniesienia, których współrzędne będą estymowane według wieloparametrowego modelu Gaussa-Markowa.

Na podstawie zaproponowanych wskaźników globalnej oceny niedokładności wyznaczania sieci geodezyjnych, można prowadzić analizy dotyczące doboru optymalnej struktury obserwacji w sieciach geodezyjnych ukierunkowanych na ustalenie układu odniesienia do określania przemieszczeń punktów w obrębie górotworu.

W końcowej części pracy przedstawiono zasady wyznaczania przemieszczeń punktów reprezentujących obiekty inżynierskie posadowione w obrębie górotworu wraz z pełną analizą wariancji. Kryterium istotności wyznaczanych przemieszczeń tych punktów zostało sformułowane w formie nierówności zawierającej odchylenie standardowe przemieszczeń punktów oraz kwantyl rozkładu Studenta.

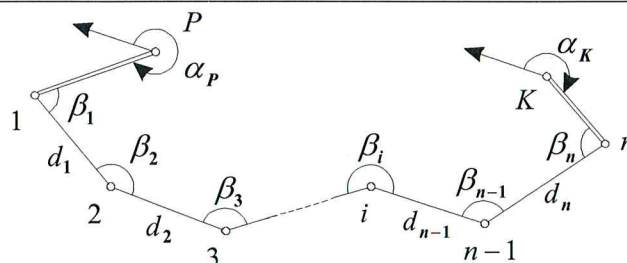
Przedział ufności określenia przemieszczeń punktów jest uzależniony od wartości wskaźników opisujących globalną niedokładność sieci punktów odniesienia

Omówienie wyników badań związanych z rozwinięciem tezy nr 5**Warunki funkcyjne dla elementów sieci geodezyjnych w formie ciągów poligonowych**

Jeżeli sieć punktów geodezyjnych jest w formie poligonowego ciągu otwartego, o ustalonych współrzędnych punktów końcowych (X_1, Y_1) i (X_n, Y_n) według rysunku 1, to warunki funkcyjne dla obserwowanych kątów i długości w tych sieciach będą miały następującą postać:

$$X_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i \cos(\alpha_p + \beta_i - i \times 200^g) - X_n = 0 \quad (5.1)$$

$$Y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i \sin(\alpha_p + \beta_i - i \times 200^g) - Y_n = 0 \quad (5.2)$$



Rys. 5.1. Szkic sieci punktów geodezyjnych

Jeżeli wyżej rozpatrywany układ obserwacji tworzy figurę zamkniętą, wtedy $X_1 = X_n$ i $Y_1 = Y_n$, a warunki (5.1) i (5.2) będą zawierać tylko sumy przyrostów współrzędnych Δx_i oraz Δy_i , stąd ich postać będzie następująca:

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_i \cos(\alpha_p + \beta_i - i \times 200^g) = 0 \quad (5.3)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_i \sin(\alpha_p + \beta_i - i \times 200^g) = 0 \quad (5.4)$$

Po dokonaniu rozwinięcia szereg Taylora przy uwzględnieniu tylko pierwszych pochodnych cząstkowych i oznaczeniu różniczek dla kątów przez $d(\beta_i)$, a różniczek dla długości przez $d(d_i)$, warunki funkcyjne (5.1) i (5.2) przyjmą następującą postać liniową:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\cos \alpha_i) \cdot d(d_i) - \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta y_{i,n}) \cdot \frac{d(\beta_i)}{\rho} = X_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i \cos \alpha_i - X_n = \Delta_x \quad (5.5)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\sin \alpha_i) \cdot d(d_i) + \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta x_{i,n}) \cdot \frac{d(\beta_i)}{\rho} = Y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i \sin \alpha_i - Y_n = \Delta_y \quad (5.6)$$

przy czym α_i oznacza azymut kolejnego odcinka (boku), zaś $\Delta x_{i,n}$ i $\Delta y_{i,n}$ oznaczają przyrosty współrzędnej wzdłuż osi Ox i osi Oy kolejnego i-tego punktu względem n-tego punktu rozważanej sieci, natomiast Δ_x i Δ_y stanowią odchyłki niespełnienia warunków funkcyjnych (5.1) i (5.2) lub (5.3) i (5.4).

Liniowa postać (5.5) i (5.6) warunków funkcyjnych na elementy obserwowane w sieciach geodezyjnych w formie ciągu poligonowego, będzie podstawą analizy wariancji dla globalnej oceny niedokładności tych sieci.

Wskaźnik geometryczny rozkładu współrzędnych punktów wyznaczanych sieci geodezyjnych

Do globalnej oceny niedokładności osnowy realizacyjnej lub sieci punktów odniesienia można rozważyć wskaźnik geometrii sieci punktów geodezyjnych, którego wartość zostanie zdefiniowana za pomocą momentów centralnych drugiego rzędu dla współrzędnych punktów, w formie następującego związku:

$$\Theta = \frac{\sum_i (x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \hat{x})^2} \sqrt{\sum_i (y_i - \hat{y})^2}} = \frac{\sum_i x_i \cdot y_i - n \cdot \hat{x} \cdot \hat{y}}{\sqrt{\sum_i x_i^2 - \hat{x}^2} \sqrt{\sum_i y_i^2 - \hat{y}^2}} \quad (5.7)$$

gdzie:

x_i, y_i - współrzędne wyznaczanych punktów sieci geodezyjnej,

\hat{x}, \hat{y} - współrzędne punktu reprezentującego środek ciężkości wyznaczanych punktów sieci geodezyjnej.

Funkcja (5.7) ma analogiczną postać do wzoru na współczynnik korelacji zupełnej, dla zmiennej losowej dwuwymiarowej, zdefiniowany przez Pearsona.

Po uwzględnieniu wszystkich zmiennych i oznaczeń na momenty centralne drugiego rzędu, wskaźnik (5.7) można zapisać w formie następującej jawnej funkcji:

$$\Theta = \frac{\sum_i \left(x_i - \frac{\sum x_i}{n} \right) \left(y_i - \frac{\sum y_i}{n} \right)}{\sqrt{\sum_i \left(x_i - \frac{\sum x_i}{n} \right)^2} \sqrt{\sum_i \left(y_i - \frac{\sum y_i}{n} \right)^2}} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} \quad (5.8)$$

przy czym, S_{xy} oznacza mieszany moment centralny zmiennych x i y rzędu drugiego, zaś S_x, S_y oznaczają pierwiastki kwadratowe z momentów centralnych zmiennych x i y drugiego rzędu. Wartość wskaźnika Θ zawsze zawiera się w przedziale od -1 do +1.

Dla analizy wariancji wskaźnika Θ konieczne jest doprowadzenia jego postaci do formy liniowej. W tym celu zostaną policzone pochodne cząstkowe funkcji Θ względem poszczególnych współrzędnych punktów reprezentujących osnowę realizacyjną lub sieć punktów odniesienia.

Po obliczeniu pochodnych cząstkowych funkcji złożonej Θ względem poszczególnych współrzędnych x_i i y_i punktów otrzymano następujące związki:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x_i} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)(y_i - \hat{y})S_x S_y - S_{xy} \frac{1}{2S_x} 2 \sum_i (x_i - \hat{x}) \left(1 - \frac{1}{n}\right) S_y}{S_x^2 S_y^2} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y_i} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)(x_i - \hat{x})S_x S_y - S_{xy} \frac{1}{2S_y} 2 \sum_i (y_i - \hat{y}) \left(1 - \frac{1}{n}\right) S_x}{S_x^2 S_y^2} \quad (5.10)$$

Wykonując dalsze przekształcenia w powyższych zależnościach, otrzymano następującą postać pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x_i} = \frac{n-1}{n} \frac{1}{S_x S_y} (y_i - \hat{y}) - \frac{n-1}{n} \frac{\Theta}{S_x^2} \sum_i (x_i - \hat{x}) \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y_i} = \frac{n-1}{n} \frac{1}{S_x S_y} (x_i - \hat{x}) - \frac{n-1}{n} \frac{\Theta}{S_y^2} \sum_i (y_i - \hat{y}) \quad (5.12)$$

Na podstawie zależności (5.11) i (5.12) można zapisać formę liniową wskaźnika Θ , która przybiera następującą postać:

$$\left[\frac{n-1}{n} \frac{1}{S_x S_y} (y_i - \hat{y}) - \frac{n-1}{n} \frac{\Theta}{S_x^2} \sum_i (x_i - \hat{x}) \right] dx_i + \left[\frac{n-1}{n} \frac{1}{S_x S_y} (x_i - \hat{x}) - \frac{n-1}{n} \frac{\Theta}{S_y^2} \sum_i (y_i - \hat{y}) \right] dy_i = \Delta \Theta \quad (5.13)$$

Wyprowadzona liniowa postać wskaźnika Θ będzie podstawą analizy jego wariancji sformułowanej dla osnów realizacyjnych lub sieci punktów odniesienia.

Oznaczenia i wzory do estymacji najbardziej prawdopodobnych współrzędnych punktów w sieciach geodezyjnych oraz ich macierzy kowariancji

Niech obserwacje L_1, L_2, \dots, L_n dotyczą skorelowanych wielkości za pomocą macierz \mathbf{G} , których wartości oczekiwane można opisać za pomocą ustalonych modeli liniowych \mathbf{AX} , przy czym estymowanymi parametrami są współrzędne punktów sieci geodezyjnych x_1, x_2, \dots, x_n oraz wariancja składnika losowego w modelach liniowych σ^2 , zaś $[a_{ii}] = \mathbf{A}$ jest macierzą znanych współczynników (pochodnych cząstkowych) równań obserwacyjnych dla elementów sieci punktów geodezyjnych. Macierz \mathbf{A} może zawierać równania obserwacyjne dla pomierzonych odległości pomiędzy wyróżnionymi punktami, dla pomierzonych kątów pomiędzy wyróżnionymi odcinkami (bokami) lub równania obserwacyjne dla zaobserwowanych przewyższeń (różnic wysokości) między wyróżnionymi punktami.

Wprowadzając następujące oznaczenia macierzowe:

- \mathbf{L} - wektor zredukowanych wielkości obserwowanych ΔL , czyli wyrazów wolnych o wymiarze $(n \times 1)$,
- \mathbf{A} - macierz znanych współczynników równań obserwacyjnych (pochodnych cząstkowych) o wymiarze $(n \times k)$,
- \mathbf{X} - wektor niewiadomych (różniczek dx do estymowanych parametrów) o wymiarze $(k \times 1)$
- \mathbf{G} - przekątniowa macierz wariancji dla obserwacji o wymiarze $(n \times n)$,
- σ^2 - wariancja składnika losowego δ_i w przyjętym modelu,
- δ - wektor odchyłek losowych δ_i o wymiarze $(n \times 1)$,

liniowy model dla estymowanych parametrów zmiennych losowych można zapisać w następującej formie macierzowej:

$$\mathbf{L} = \mathbf{AX} + \delta; \quad E[\mathbf{L}] = \mathbf{AX}; \quad V[\mathbf{L}] = \sigma^2 \mathbf{G}; \quad \det \mathbf{G} \neq 0 \quad (5.14)$$

$$E[\delta] = \mathbf{0}; \quad V[\delta] = \sigma^2 \mathbf{G}; \quad \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{P} \quad (5.15)$$

Jeżeli macierz $(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})$ będzie nieosobliwa, to rozwiązanie układu równań (5.12), zgodnie z metodą najmniejszej sumy kwadratów (MNK), można zapisać w postaci:

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = \mathbf{A}^+ \mathbf{L} \quad (5.16)$$

Wzór (5.16) określa nieobciążony estymator wektora \mathbf{X} , zatem macierz kowariancji tego wektora wyrażona jest zależnością

$$\text{Cov}[\hat{\mathbf{X}}] = \sigma^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{C} \quad (5.17)$$

Nieobciążony estymator wariancji $\hat{\sigma}^2$ składnika losowego δ wyznacza się na podstawie znanego wzoru

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{L} - \hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}}{n - k} \quad (5.18)$$

przy czym $k = R(\mathbf{A})$.

Macierz kowariancji dla wektora modelowych wartości obserwowanych elementów w sieci punktów geodezyjnych $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}$ wyraża się wzorem:

$$\text{Cov}[\hat{\mathbf{L}}] = \sigma^2 \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (5.19)$$

Jeżeli analiza wariancji jest prowadzona na etapie projektowania pomiaru sieci punktów geodezyjnych, wtedy przyjmujemy wartość $\sigma_0=1$, a macierz kowariancji dla wektora projektowanych obserwacji elementów w sieci punktów geodezyjnych przyjmuje postać:

$$\text{Cov}[\mathbf{L}] = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (5.20)$$

W przypadku gdy obserwacje L_i posiadają identyczne wariancje, wtedy we wszystkich wyżej ustalonych wzorach należy wprowadzić następujące upraszczające oznaczenia: $\mathbf{G} = \mathbf{I}$ stąd $\mathbf{P} = \mathbf{I}$.

Globalna ocena niedokładności sieci punktów geodezyjnych w formie ciągu poligonowego

Jeżeli przedmiotem rozważań będzie niedokładność sieci punktów geodezyjnych w formie ciągu otwartego, to na podstawie analizy wariancji dla warunków funkcyjnych (5.5) i (5.6) można określić macierz kowariancji dla wielkości Δ_x i Δ_y :

$$\begin{aligned} \text{cov}(\Delta_x, \Delta_y) &= \begin{bmatrix} V(\Delta_x) & \text{cov}(\Delta_x, \Delta_y) \\ \text{cov}(\Delta_x, \Delta_y) & V(\Delta_y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \\ \dots & \dots \\ \cos \alpha_{n-1} & \sin \alpha_{n-1} \\ -\Delta y_{1,n} & \Delta x_{1,n} \\ -\Delta y_{2,n} & \Delta x_{2,n} \\ \dots & \dots \\ -\Delta y_{n-1,n} & \Delta x_{n-1,n} \end{bmatrix}^T \times \text{Cov}[\hat{\mathbf{L}}] \times \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \\ \dots & \dots \\ \cos \alpha_{n-1} & \sin \alpha_{n-1} \\ -\Delta y_{1,n} & \Delta x_{1,n} \\ -\Delta y_{2,n} & \Delta x_{2,n} \\ \dots & \dots \\ -\Delta y_{n-1,n} & \Delta x_{n-1,n} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Macierz kowariancji dla wektora projektowanych do obserwacji elementów w sieci punktów geodezyjnych może być określona na etapie estymacji współrzędnych punktów za pomocą wzoru (5.19) albo na etapie projektowania pomiaru sieci punktów geodezyjnych na podstawie wzoru (5.20).

Na podstawie macierzy kowariancji (5.21) można określić półosie A i B elipsy stałej gęstości prawdopodobieństwa, które definiuje się według następujących wzorów:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\Delta_x, \Delta_y) &= \begin{bmatrix} V(\Delta_x) & \text{cov}(\Delta_x, \Delta_y) \\ \text{cov}(\Delta_x, \Delta_y) & V(\Delta_y) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A^2 \\ B^2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{V(\Delta_x) + V(\Delta_y)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{V(\Delta_x) - V(\Delta_y)}{2} \right]^2 + [\text{cov}(\Delta_x, \Delta_y)]^2} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Azymut dłuższej półosi (A) elipsy stałej gęstości prawdopodobieństwa określa się według następujących wzorów:

$$\operatorname{arctg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{cov}(\Delta_x, \Delta_y)}{V(\Delta_x) - V(\Delta_y)} \quad (5.23)$$

Wyznaczone parametry elipsy według wzorów (5.22) i (5.23), zilustrowane graficznie w odpowiedniej skali, mogą stanowić podstawę do globalnej oceny niedokładności projektowanej lub wyznaczonej sieci punktów geodezyjnych w formie ciągu poligonowego.

Parametry elipsy stałej gęstości prawdopodobieństwa mogą być również podstawą do zdefiniowania jednowymiarowego wskaźnika niedokładności sieci punktów geodezyjnych, którego wartość powinna bazować na polu powierzchni tej elipsy, czyli na iloczynie jej półosi. Po wykonaniu odpowiednich przekształceń iloczynu A i B uzyskano następujące wzory:

$$A \cdot B = \sqrt{V[\Delta_x] \cdot V[\Delta_y] - \operatorname{cov}^2[\Delta_x, \Delta_y]} \quad (5.24)$$

Aby nadać praktyczny wymiar wyżej rozważanym wielkościom, pole powierzchni elipsy zostanie zastąpione przez pole powierzchni koła, którego promień R_E będzie reprezentował niedokładność wyznaczenia wszystkich rozważanych punktów w sieci geodezyjnej, czyli

$$R_E = \sqrt[4]{V[\Delta_x] \cdot V[\Delta_y] - \operatorname{cov}^2[\Delta_x, \Delta_y]} \quad (5.25)$$

Warto zaznaczyć, że wyrażenie pod znakiem pierwiastka stopnia 4 stanowi wartość wyznacznika z macierzy kowariancji określonej wzorem (1.21), stąd jego wartość stanowi niezmiennik transformacji współrzędnych punktów sieci geodezyjnej.

Globalna ocena niedokładności sieci punktów geodezyjnych w dowolnej formie

Do globalnej oceny niedokładności osnowy realizacyjnej lub sieci punktów odniesienia, można wykorzystać liniową formę wskaźnika Θ postaci (5.13), który opisuje geometrię sieci punktów geodezyjnych, zdefiniowaną za pomocą momentów centralnych drugiego rzędu oraz macierz kowariancji dla projektowanych lub wyznaczanych współrzędnych punktów tych sieci postaci (5.17).

$$V[\Theta] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial y_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Theta}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial y_n} \end{Bmatrix}^T \times \operatorname{Cov}[\hat{\mathbf{X}}] \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial y_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Theta}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial y_n} \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

Pochodne występujące w powyższym wzorze, zdefiniowane według wzorów (5.11) i (5.12), wiążą wzajemnie współrzędne wszystkich punktów projektowanej lub wyznaczonej sieci geodezyjnej.

Zdefiniowane wskaźniki (5.25) i (5.26) stanowią niezmienniki transformacji współrzędnych punktów rozważanych sieci geodezyjnych.

Zastosowanie proponowanych wskaźników globalnej oceny niedokładności do optymalizacji sieci punktów odniesienia

Wstępny projekt usytuowania punktów sieci geodezyjnej oraz ustalony wariant programu obserwacji elementów w tej sieci, pozwala zawsze określić macierz kowariancji dla współrzędnych punktów reprezentujących sieć punktów odniesienia, co ilustrują przedstawione wzory (5.17) – (5.19).

Każdy nowy projekt korygujący usytuowanie punktów sieci geodezyjnej, przy tym samym programie obserwacji, na ogół prowadzi do zanedbywalnie małej zmiany elementów macierzy kowariancji tej sieci. Na podstawie określonej macierzy kowariancji dla projektowanej sieci punktów odniesienia, oraz w oparciu o wyprowadzone formuły na wskaźniki (5.25) i (5.26) globalnej niedokładności wyznaczenia punktów tej sieci, można wyliczyć wartości wskaźnika R_E lub $V[\Theta]$, według każdego przyjętego wariantu pomiaru sieci punktów odniesienia.

Do wyboru optymalnego wariantu pomiaru i estymacji współrzędnych punktów projektowanej sieci, trzeba wprowadzić jeszcze jeden parametr (η), który będzie uwzględniał liczbę nadliczbowych pomiarów oraz sumaryczną liczbę wszystkich pomiarów w sieci (n) i liczbę estymowanych współrzędnych punktów (u). Parametr ten zostanie zdefiniowany według następującej zależności:

$$\eta = \frac{n-u}{n+u} \quad (5.27)$$

Z definicji (5.27) wynika, że im mniejsza będzie wartość parametru η tym korzystniejsza jest, z punktu widzenia ekonomicznego, konstrukcja pomiarowa projektowanej sieci geodezyjnej. Wybór optymalnego wariantu pomiaru projektowanej sieci punktów odniesienia powinien opierać się na iloczynie parametru R_E i η lub $V[\Theta]$ i η . Najmniejsza wartość tego iloczynu, która będzie oznaczana przez Ω , będzie podstawą do przyjęcia tego programu obserwacji, jako najbardziej optymalnego, czyli

$$\Omega = R_E \times \eta = \min \quad \text{lub} \quad \Omega = V[\Theta] \times \eta = \min \quad (5.28)$$

Warunki (5.28) mogą być wykorzystane do ustalenia optymalnego programu obserwacji w projektowanej sieci punktów odniesienia.

Określanie przemieszczeń punktów reprezentujących obiekty inżynierskie w obrębie górotworu

Wyznaczone według wzoru (5.16), współrzędne punktów sieci odniesienia jednoznacznie definiują układ odniesienia, względem którego okresowo obserwuje się punkty reprezentujące obiekty inżynierskie posadowione w obrębie górotworu. Przy wyznaczaniu przemieszczeń tych punktów trzeba uwzględnić niedokładność określenia współrzędnych punktów sieci odniesienia zawartą w macierzy kowariancji zdefiniowanej wzorem (1.17), która powstała w wyniku optymalizacji pomiaru tej sieci. Każdy okresowy pomiar powinien być poddany niezależnej estymacji. W modelu tym trzeba do macierzy równań obserwacji dołożyć podmacierz zawierającą jedyńki na przekątnej, odpowiadające współrzędnym punktów odniesienia, z których zostały wykonane obserwacje do punktów reprezentujących obiekty inżynierskie posadowione w obrębie górotworu. Zatem, zamiast macierzy A będzie uwzględniana blokowa macierz α , która będzie zawierała macierz A równań obserwacyjnych dla elementów obserwowanych w pomiarze okresowym oraz macierz jednostkową I reprezentującą wtórne obserwacje współrzędnych punktów odniesienia, następującej postaci:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

Macierzy \mathbf{G} będzie odpowiadać blokowa macierz $\boldsymbol{\gamma}$, która powinna się składać z macierzy \mathbf{G} zawierającej wariancje dla obserwowanych wielkości w pomiarze okresowym oraz z macierzy \mathbf{c} składającej się z wybranych elementów macierzy kowariancji (5.17) dla punktów odniesienia, z których był wykonywany pomiar okresowy, czyli:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c} \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

Z powyższego wzoru widać, że na wartości wyznaczanych przemieszczeń punktów mają bezpośredni wpływ elementy macierzy kowariancji określone dla sieci punktów odniesienia. Zatem istotne znaczenie ma optymalizacja w zakresie doboru obserwacji i ich dokładności dla sieci punktów odniesienia, która jest oparta na zdefiniowanych w pracy globalnych wskaźnikach niedokładności tych sieci.

Najbardziej prawdopodobne wartości współrzędnych punktów reprezentujących obiekty inżynierskie posadowione w obrębie górotworu, w każdym okresowym pomiarze powinny być wyznaczone według wzoru podobnego do wzoru (5.16), czyli:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{a}^T \times \boldsymbol{\gamma}^{-1} \times \mathbf{a})^{-1} \times \mathbf{a}^T \times \boldsymbol{\gamma}^{-1} \times \mathbf{l} \quad (5.31)$$

przy czym \mathbf{l} oznacza macierz wyrazów wolnych dla wielkości obserwowanych w pomiarze okresowym. Macierz kowariancji dla wektora estymowanych współrzędnych punktów (1.31) wyraża się zależnością:

$$\text{Cov}[\hat{\mathbf{x}}] = \hat{\sigma}^2 (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\gamma}^{-1} \mathbf{a})^{-1} \quad (5.32)$$

Nieobciążony estymator wariancji $\hat{\sigma}^2$ składnika losowego δ wyznacza się na podstawie znanego wzoru:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{l}^T \boldsymbol{\gamma}^{-1} \mathbf{l} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{a}^T \boldsymbol{\gamma}^{-1} \mathbf{l}}{n - k} \quad (5.33)$$

Przy czym $(n-k)$ oznacza liczbę nadliczbowych obserwacji w pomiarze okresowym.

Na podstawie wzorów (5.32) i (5.33) widać, że optymalizacja sieci punktów odniesienia za pomocą wskaźników globalnych ma bezpośredni wpływ na wartość wyznaczanych składowych przemieszczeń punktów, reprezentujących obiekty inżynierskie posadowione w obrębie górotworu oraz na niedokładność tych przemieszczeń.

Różnice współrzędnych punktów reprezentujących obiekty inżynierskie posadowione w obrębie górotworu, z dwóch okresowych pomiarów, określają składowe przemieszczenia tych punktów, czyli

$$\Delta \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1 \quad (5.34)$$

Z uwagi na niezależność okresowych pomiarów macierz kowariancji dla wyznaczanych przemieszczeń punktów powinna być określana według wzoru

$$\text{Cov}[\Delta \mathbf{x}] = \text{Cov}[\hat{\mathbf{x}}_2] + \text{Cov}[\hat{\mathbf{x}}_1] \quad (5.35)$$

Jako kryterium istotności wyznaczanych przemieszczeń punktów reprezentujących obiekty inżynierskie posadowione w obrębie górotworu, przyjmuje się nierówność

zdefiniowaną za pomocą odchylenia standardowego określonego z macierzy (5.35) oraz kwantyla rozkładu Studenta, czyli:

$$\Delta \mathbf{x} > t\left(n-u; 1 - \frac{\alpha}{2}\right) \times \sigma[\Delta \mathbf{x}] \quad (5.36)$$

przy czym $t(n-u; 1-\alpha/2)$ oznacza kwantyl rozkładu Studenta dla $(n-u)$ stopni swobody oraz dla wskaźnika istotności α . Jeżeli za α przyjmiemy 0,05 to kryterium (5.36) będzie realizowane na poziomie ufności $1-\alpha = 0,95$, czyli 95 %.

Dla przemieszczeń punktów reprezentujących obiekty inżynierskie posadowione w obrębie górotworu niespełniających nierówności (5.36), należy uznać, że ich wartość, z punktu widzenia dokładności pomiarów okresowych, jest nieistotna.

Oryginalne osiągnięcia zawarte w rozwinięciu tezy nr 5

W uzasadnieniu i rozwinięciu tezy nr 5 przedstawiono autorskie propozycje dotyczące globalnej oceny niedokładności sieci punktów odniesienia, których współrzędne są estymowane według wieloparametrowego modelu Gaussa-Markowa. Na podstawie zaproponowanych wskaźników globalnej oceny niedokładności wyznaczania sieci geodezyjnych, można prowadzić analizy dotyczące doboru optymalnej struktury obserwacji w sieciach geodezyjnych ukierunkowanych na ustalanie układu odniesienia do określania przemieszczeń punktów w obrębie górotworu. Wybór optymalnego wariantu pomiaru projektowanej sieci punktów odniesienia powinien opierać się na iloczynie parametru R_E i η lub $V[\Theta]$ i η . Najmniejsza wartość tego iloczynu, która będzie oznaczana przez Ω , będzie podstawą do przyjęcia tego programu obserwacji, jako najbardziej optymalnego, czyli:

$$\Omega = R_E \times \eta = \min \quad \text{lub} \quad \Omega = V[\Theta] \times \eta = \min \quad (5.28)$$

Literatura:

- Adamczewski Z. (2004):** *Adjustment calculus*, Warsaw.
- Baarda W. (1967).** Statistical concepts in geodesy. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series 2, No. 4, Delft, The Netherlands.
- Baarda W. (1968).** A testing procedure for use in geodetic networks. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series 2, No. 5, Delft, The Netherlands.
- Baarda W. (1973):** S-Transformations and criterion matrices. Neth. Geod. Com., Publications on Geodesy, New Series, no 1, Delft.
- Baarda W. (1977).** Measures for the accuracy of geodetic networks. In: Symposium on optimization of design and computation of control networks. 4–10 July, Sopron, Hungary, pp 419–436.
- Baran W. (1999):** Teoretyczne podstawy opracowania wyników pomiarów geodezyjnych. PWN. Warszawa.
- Bryt-Nitarska I. (2012):** Ocena stanu technicznego budynków na terenach górniczych. NR 8PRZEGLĄD GÓRNICZY 2012.
- Caspary W. (1998).** Anmerkungen zur balancierten Ausgleichung, Zeitschrift für Vermessungswesen (ZN) 8: 271-272.
- Chrzanowski A. (1981):** Optimization of the breakthrough Accuracy in Tunneling Surveys. The Canadian Surveyer No. 35
- Cross P. A. (1985).** Numerical methods in network design, In: Grafarend, E.W., Sanso, F. (editors) Optimization and design of geodetic networks. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Czaja J. (1996 a):** Wybrane zagadnienia z geodezji inżynierskiej. Wydawnictwa AGH, Kraków.
- Czaja J. (1996 b).** Modele statystyczne w informacji o terenie. Wydawnictwa AGH. Kraków.
- Dąbrowski J. (2014 a)** Optimization of setting out controls in aspect of stakeout accuracy of engineering objects . Geomatics and Environmental Engineering. Wydawnictwa AGH, Kraków.
- Dąbrowski J. (2014 b).** Accuracy standards of tying the horizontal and vertical control network to the national geodetic control network / Janusz DĄBROWSKI // Geomatics and Environmental Engineering ; ISSN 1898-1135. — Tytuł poprz.: Geodezja oraz Inżynieria Środowiska. — 2014 vol. 8 no. 3, s. 41–57. — Bibliogr. s. 56–57
- Dąbrowski J. (2014 c)** Chosen issues of geodetic science. Wydawnictwo PWSTE Jarosław.
- Dąbrowski J. (2014 d)** Zagadnienia geodezji inżynierskiej dotyczące inwestycji drogowych Wydawnictwa AGH, Kraków.
- Dąbrowski J. (2013e)** Determination of displacements and deformations of engineering objects in mining areas . Przegląd Górniczy .
- Gaździcki J. (1976)** Analiza dokładności poziomych sieci geodezyjnych. Pr.Inst.Geod. 5.
- Hejmanowski R. Sopata P., Stoch T., Wójcik A. (2012),** : Aktualizacja rzeźby terenu górniczego oparta na pomiarach GPS-RTK. NR 8PRZEGLĄD GÓRNICZY 2012.
- Hekimoglu S. (1998).** Change of the diagonal elements of the hat matrix under changing weight and changing position of an observation, Zeitschrift für Vermessungswesen (ZN), 8: 266-271.
- Jaśkowski W. (2012):** Monitoring przemieszczeń terenu i obiektów budowlanych położonych na terenach górniczych metodami telemetrycznymi opracowanymi w KOTG, GiGG AGH Kraków. NR 8PRZEGLĄD GÓRNICZY .
- Kadaj R. (1995);** GEONET. Pakiet programów obliczeniowych.

- Kamiński W. (2000)**; Odporna estymacja bayesowska w wyrównaniu sieci geodezyjnych. UWM
- Kampmann G. (1994)**. Robuste Deformationsanalyse mittels balancierter Ausgleichung, Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 101(1): 8:17.
- Kampmann G., and Krause B. (1996)**. Balanced observations with a straight line fit. Bolletino di Geodesia e Scienze Affini, 55(2): 134-141.
- Kowalski A. (2007)**: Nieustalone górnicze deformacje powierzchni w aspekcie dokładności prognoz. Wydawnictwa GIG. Katowice.
- Krawczyk A., Sopata P., Stoch T. (2012)**: Ocena możliwości wykorzystania InSAR do monitoringu deformacji wywołanych eksploatacją ściany 335 pokładu 209 kopalni ZG „Sobieski”. NR 8 PRZEGLĄD GÓRNICZY 2012.
- Kwiatkiewicz J. (2007)**: Obiekty budowlane na terenach górniczych. Wydawnictwa GIG. Katowice 2007.
- Maciaszek J. (2012)**: Systemy informacji o terenach pogórnich. Nr 8 Przegląd Górniczy.
- Niedojadło Z., Sieradzy K., Spólnik A. (2012)**: Ustalenie rzeczywistego stanu deformacji szybów LGOM. NR PRZEGLĄD GÓRNICZY 2012.
- Ostrowski J.; (2006)**: Deformacje powierzchni a zagrożenia uszkodzeniami budynków na terenach górniczych w ujęciu probabilistycznym. Rozprawy, Monografie, nr 160. UWND AGH Kraków.
- Paulewicz A. (2012)**: Badanie zmienności obniżen powierzchni terenu zachodzących pod wpływem eksploatacji górniczej za pomocą metod geostatystycznych. NR 7 PRZEGLĄD GÓRNICZY .
- Pelzer H. (1974)**: Zur Behandlung singularer Ausgleichungsaufgaben. Zeitschrift für Vermessungswesen, heft 5.
- Pope A.J. (1975)**. The statistics of residuals and the detection of outliers. In: IUGG IAG XVI General Assembly, Grenoble, France.
- Popiołek E. (2009)**: Ochrona terenów górniczych. Wydawnictwa AGH. Kraków.
- Prószyński W. (1986)**: *Accuracy analysis for non-distorting connection of engineering survey networks. XVIII International Congress FIG, Toronto, Canada.*
- Prószyński W. (1997)**. Measuring the robustness potential of the least squares estimation: geodetic illustration. J Geod 71:652–659.
- Prószyński W. (2000)**. On outlier-hiding effects in specific Gauss–Markov models: geodetic examples. J Geod 74:581–589.
- Prószyński W., Kwaśniak M. (2006)**: *Fundamentals of geodetic determination of dislocations.* Warsaw
- Rao C. (1982)**: *Linear models of mathematical statistics.* PWN, Warsaw
- Sopata P. (2012)**: Wykorzystanie metody GPS-RTK do pomiarów przemieszczeń powierzchni terenów górniczych. NR 7 PRZEGLĄD GÓRNICZY .
- Strzałkowski P. (2012)**: Wybrane aspekty określania stanu deformacji terenu górniczego. NR 6 PRZEGLĄD GÓRNICZY .
- Teunissen P.J.G. (2000)**: *Adjustment theory – an introduction, VSSD, Delft, The Netherlands*
- Wiśniewski Z. (2000)**: *Matrix algebra and mathematical statistics in adjustment calculations.* UWM Publisher in Olsztyn.
- Wiśniewski Z. (2005)** Rachunek wyrównawczy w geodezji (z przykładami) – Wydawnictwo UWM w Olsztynie. Olsztyn.

Janusz Dobrowski