

## Spis treści

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Imię i nazwisko</b>  | <b>2</b>  |
| <b>2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe</b>  | <b>2</b>  |
| <b>3. Dotychczasowe zatrudnienie w jednostkach naukowych</b>   | <b>2</b>  |
| <b>4. Wskazanie osiągnięcia, wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule naukowym w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.)</b> | <b>2</b>  |
| <b>a) Tytuł osiągnięcia naukowego</b>  | <b>2</b>  |
| <b>b) Wykaz publikacji naukowych stanowiących podstawę osiągnięcia naukowego</b>   | <b>3</b>  |
| <b>c) Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania</b>  | <b>4</b>  |
| <b>5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych</b>   | <b>27</b> |

## 1. Imię i nazwisko: Marcin Ligas

## 2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

---

|          |   |
|----------|---|
| VII 2006 | Stopień naukowy: doktor nauk technicznych – z wyróżnieniem<br>Dyscyplina: Geodezja i Kartografia<br>Akademia Górniczo – Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie<br>Wydział Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska<br>Rozprawa doktorska: <i>Przestrzenne modele autoregresji w zastosowaniu do wyceny nieruchomości</i> |
| VII 2002 | Tytuł zawodowy: magister inżynier<br>Dyscyplina: Geodezja i Kartografia<br>Akademia Górniczo – Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie<br>Wydział Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska<br>Praca magisterska: <i>Numeryczne metody rozwiązywania układów równań</i>  |

---

## 3. Dotychczasowe zatrudnienie w jednostkach naukowych

---

|                             |  |
|-----------------------------|--|
| październik 2006 –<br>teraz | Adiunkt<br>Akademia Górniczo - Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie<br>Wydział Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska                         |
| październik 2007 –<br>teraz | Starszy wykładowca<br>Państwowa Wyższa Szkoła Techniczno - Ekonomiczna im. ks.<br>Bronisława Markiewicza w Jarosławiu<br>Instytut Inżynierii Technicznej |

---

## 4. Wskazanie osiągnięcia, wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule naukowym w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):

### a) Tytuł osiągnięcia naukowego

Osiągnięciem habilitacyjnym, określonym zgodnie z obowiązującą "Ustawą o stopniach naukowych... art. 16 ust. 2" jest cykl publikacji powiązanych tematycznie pod tytułem:

***Optymalizacja wydajności wybranych metod i algorytmów geodezji obliczeniowej***

**b) Wykaz publikacji naukowych stanowiących podstawę osiągnięcia naukowego**

[1] Ligas M., 2012, *Cartesian to geodetic coordinates conversion on a triaxial ellipsoid*, *Journal of Geodesy*, 86(4), 249–256.

Impact Factor: 2.808  
punktacja (lista A czasopism MNiSW, 2012): 35.000  
Udział procentowy: 100%

---

[2] Ligas M., 2012, *Two modified algorithms to transform Cartesian to geodetic coordinates on a triaxial ellipsoid*, *Studia Geophysica et Geodaetica*, 56(4), 993–1006.

Impact Factor: 0.975  
punktacja (lista A czasopism MNiSW, 2012): 20.000  
Udział procentowy: 100%

---

[3] Ligas M., 2013, *Various parameterizations of "latitude" equation – Cartesian to geodetic coordinates transformation*, *Journal of Geodetic Science*, 3(2), 87–94.

brak Impact Factor  
punktacja (lista B czasopism MNiSW, 2013): 9.000  
Udział procentowy: 100%

---

[4] Ligas M., 2013, *Simple solution to the three point resection problem*, *Journal of Surveying Engineering-ASCE*, vol. 139 no. 3, s. 120–125.

Impact Factor: 1.000  
punktacja (lista A czasopism MNiSW, 2013): 25.000  
Udział procentowy: 100%

---

[5] Ligas M., Kulczycki M., 2010, *Simple spatial prediction – least squares prediction, simple kriging, and conditional expectation of normal vector*, *Geodesy and Cartography*, 59(2), 69–81.

brak Impact Factor  
punktacja (lista B czasopism MNiSW, 2010): 9.000  
Udział procentowy: 80%

Mój wkład w powstanie pracy polegał na opracowaniu koncepcji publikacji, studiach literaturowych, charakterystyce i porównaniu metod predykcji przestrzennej, opracowaniu zasadniczej części manuskryptu oraz jego redakcji w języku angielskim.

---

[6] Ligas M., Banasik P., 2012, *Local height transformation through polynomial regression*, *Geodesy and Cartography*, 61(1), 3–17.

brak Impact Factor  
punktacja (lista B czasopism MNiSW, 2012): 8.000  
Udział procentowy: 60%

Mój wkład w powstanie pracy polegał na współautorstwie koncepcji publikacji, charakterystyce wykorzystanych metod, propozycji sposobu weryfikacji modelu transformacji, wykonaniu obliczeń oraz prezentacji graficznej wyników, napisaniu zasadniczej części oraz redakcji manuskryptu w języku angielskim.

---

**[7] Ligas M.,** Kulczycki M., 2017, *Kriging and moving window kriging on a sphere in geometric (GNSS/levelling) geoid modeling*, *Survey Review*,  
<http://dx.doi.org/10.1080/00396265.2016.1247131>

**Impact Factor: 0.573**

**punktacja (lista A czasopism MNiSW, 2016): 15.000**

**Udział procentowy: 60%**

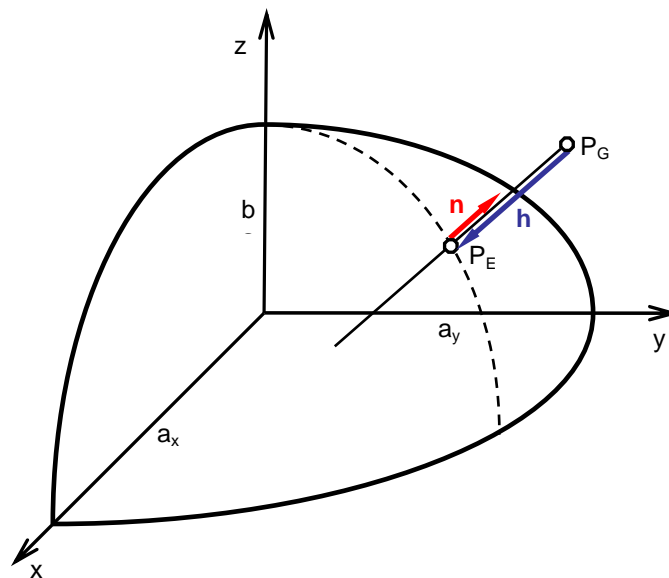
Mój wkład w powstanie pracy polegał na opracowaniu koncepcji publikacji, charakterystyce wykorzystanych metod geostatystycznych (oraz opisie różnic między „płaskim” a „sferycznym” krigingiem), przygotowaniu danych oraz zaprojektowaniu algorytmów obliczeniowych, napisaniu zasadniczej części oraz redakcji manuskryptu w języku angielskim.

---

### **c) Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania**

Powszechne użycie systemów nawigacji satelitarnej (GNSS) oraz geodezyjnych technik kosmicznych, dla których naturalnym układem współrzędnych często jest układ współrzędnych kartezjańskich (Feltens, 2008) przyczyniło się do rozwoju algorytmów zamiany współrzędnych kartezjańskich na geodezyjne (lub planetograficzne). Można podać wiele przykładów, w których szybkie i dokładne algorytmy konwersji współrzędnych mogą znaleźć swoje zastosowanie. Są to między innymi: transformacja między układem geocentrycznym a topocentrycznym, odwzorowania kartograficzne, analiza szeregów czasowych współrzędnych stacji GNSS, obliczanie odstępów geoidy od elipsoidy (lub anomalii wysokości w zależności od przyjętego systemu wysokości), obliczanie współczynników DOP (Dilution of Precision), wykorzystanie modeli geopotencjału i wiele innych. W 2006 r. Fukushima (Fukushima, 2006) podawał, że „... w Japonii Ministerstwo Spraw Ogólnych (Ministry of General Affairs) ogłosiło w maju 2004 r., że wszystkie telefony komórkowe trzeciej generacji muszą być wyposażone w odbiornik GPS do kwietnia 2007. Wprowadzenie takiej polityki ma identyfikować lokalizacje wezwań z telefonów komórkowych do nagłych wypadków. Ze względu na fakt ograniczonych zasobów obliczeniowych w telefonach komórkowych oraz częstotliwość wywołań przeliczenia współrzędnych, rozwój szybkich i dokładnych procedur jest konieczny...”. Rozwój tego typu algorytmów nie ogranicza się obecnie jedynie do elipsoid dwuosiowych (obrotowych) – do takich przyzwyczailiśmy się ze

względu na fakt, iż elipsoida ziemiska jest taką właśnie elipsoidą, choć od czasu do czasu pojawiały się głosy, iż kształt figury Ziemi mógłby być modelowany za pomocą elipsoidy trójosiowej (Heiskanen i Vening – Meinesz, 1958, str. 80; Burša i Šima, 1980; Burša i Fialova, 1993). W dobie ciągłej eksploracji przestrzeni kosmicznej algorytmy dotyczące elipsoid trójosiowych zyskują obecnie na znaczeniu ze względu na fakt, iż wiele ciał niebieskich Układu Słonecznego traktuje się jako obiekty trójosiowe (Seidelmann et al., 2007). W publikacjach [1], [2] przedstawiono algorytmy zamiany współrzędnych kartezjańskich ( $x, y, z$ ) na geodezyjne (planetograficzne) ( $\varphi, \lambda, h$ ) dla elipsoid trójosiowych, natomiast w publikacji [3] dla elipsoidy obrotowej. Autorski algorytm zawarty w [1] wynika ze współliniowości dwóch wektorów: wektora normalnego  $\mathbf{n}$  do powierzchni elipsoidy oraz wektora  $\mathbf{h}$  łączącego punkt, którego współrzędne są przeliczane z punktem będącym rzutem wzdłuż normalnej punktu na powierzchnię elipsoidy (Rysunek 1). Zarys algorytmu przedstawiono poniżej.



Rysunek 1. Dwa współliniowe wektory:  $\mathbf{n}$  – wektor normalny,  $\mathbf{h}$  – wektor łączący punkty  $P_G$  i  $P_E$   
Źródło: Ligas (2012)

### Przedstawienie wektorów $\mathbf{n}$ oraz $\mathbf{h}$

Wektor normalny:

$$\mathbf{n} = \text{grad}\Phi = [n_1, n_2, n_3] = 2 \left[ \frac{x_E}{a_x^2}, \frac{y_E}{a_y^2}, \frac{z_E}{b^2} \right] = 2[Ex_E, Fy_E, Gz_E] \quad (1)$$

gdzie:  $\Phi = \frac{x_E^2}{a_x^2} + \frac{y_E^2}{a_y^2} + \frac{z_E^2}{b^2} - 1$

$a_x, a_y, b$  – odpowiednio długość dłuższej półosi równikowej, długość krótszej półosi równikowej, długość półosi biegunowej

Wektor łączący punkty  $P_G$  i  $P_E$ :

$$\mathbf{h} = [h_1, h_2, h_3] = [x_E - x_G, y_E - y_G, z_E - z_G] \quad (2)$$

Postać układu równań wynikającego z kryterium współliniowości wektorów  $\mathbf{n}$  i  $\mathbf{h}$ . Układ równań rozwiązywany ze względu na współrzędne punktu  $P_E(x_E, y_E, z_E)$

$$\begin{cases} f_1 = Ex_E^2 + Fy_E^2 + Gz_E^2 - 1 = 0 \\ f_2 = (x_E - x_G)Fy_E - (y_E - y_G)Ex_E = 0 \\ f_3 = (x_E - x_G)Gz_E - (z_E - z_G)Ex_E = 0 \end{cases} \quad (3a)$$

$$\begin{cases} f_1 = Ex_E^2 + Fy_E^2 + Gz_E^2 - 1 = 0 \\ f_2 = (x_E - x_G)Fy_E - (y_E - y_G)Ex_E = 0 \\ f_3 = (y_E - y_G)Gz_E - (z_E - z_G)Fy_E = 0 \end{cases} \quad (3b)$$

$$\begin{cases} f_1 = Ex_E^2 + Fy_E^2 + Gz_E^2 - 1 = 0 \\ f_2 = (x_E - x_G)Gz_E - (z_E - z_G)Ex_E = 0 \\ f_3 = (y_E - y_G)Gz_E - (z_E - z_G)Fy_E = 0 \end{cases} \quad (3c)$$

Metoda rozwiązania układu równań – ogólna metoda Newtona

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \mathbf{J}_i^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \quad (4)$$

Pierwsze przybliżenie współrzędnych kartezjańskich punktu  $P_E(x_E, y_E, z_E)$

$$x_E^o = \frac{a_x x_G}{\sqrt{x_G^2 + y_G^2 + z_G^2}}, \quad y_E^o = \frac{a_y y_G}{\sqrt{x_G^2 + y_G^2 + z_G^2}}, \quad z_E^o = \frac{bz_G}{\sqrt{x_G^2 + y_G^2 + z_G^2}} \quad (5a, b, c)$$

Współrzędne geodezyjne (planetograficzne) na podstawie współrzędnych kartezjańskich punktu  $P_E(x_E, y_E, z_E)$

$$\varphi = \arctan \left( \frac{(1 - e_e^2)}{(1 - e_x^2)} \cdot \frac{z_E}{\sqrt{(1 - e_e^2)^2 \cdot x_E^2 + y_E^2}} \right) \quad (6)$$

$$\lambda = \arctan \left( \frac{1}{(1 - e_e^2)} \cdot \frac{y_E}{x_E} \right) \quad (7)$$

$$h = \text{sign}(z_G - z_E) \text{sign}(z_E) \cdot |\mathbf{h}| \quad (8)$$

gdzie:  $e_x^2 = \frac{a_x^2 - b^2}{a_x^2}$ ,  $e_e^2 = \frac{a_x^2 - a_y^2}{a_x^2}$  - kwadraty pierwszych mimośrodków

W przedstawionym algorytmie oprócz poszukiwanych współrzędnych geodezyjnych ( $\varphi, \lambda, h$ ), jako krok pośredni, otrzymuje się również współrzędne kartezjańskie punktu będącego rzutem punktu wzdłuż normalnej na powierzchnię elipsoidy.

Autorski algorytm dla elipsoidy trójosiowej w trzech wariantach (3a, 3b, 3c) testowany był względem algorytmu zaproponowanego w 2009 przez Feltensa (Feltens, 2009). Porównanie i analiza algorytmów wykonana była w dwóch etapach. W pierwszym etapie wygenerowana została siatka punktów o znanych współrzędnych geodezyjnych stanowiąca odniesienie dla dalszych analiz. Na podstawie współrzędnych geodezyjnych punktów siatki obliczono współrzędne kartezjańskie. W etapie drugim dokonano przeliczenia współrzędnych kartezjańskich otrzymanych w etapie pierwszym na współrzędne geodezyjne, rejestrując jednocześnie czas wykonania procedur numerycznych oraz różnice między współrzędnymi geodezyjnymi z dwóch ww. etapów. Testy związane z czasem wykonania procedur numerycznych oraz dokładnością prezentowanych algorytmów przeprowadzono dla ciał niebieskich charakteryzujących się zróżnicowanymi parametrami geometrycznymi. Ze względu na różne rozmiary ciał niebieskich, zakresy testowanych wysokości elipsoidalnych zostały wybrane jako ułamki ich półosi biegunowych ( $-b/10, -b/15, -b/20, -b/25, -b/50, 0, b/50, b/25, b/20, b/15, b/10$ ). Tabele 1 i 2 przedstawiają parametry geometryczne ciał niebieskich, dla których testowano algorytmy konwersji.

Tabela 1. Ciała niebieskie i ich podstawowe parametry geometryczne

| Ciało niebieskie   | $a_x$ (km) | $a_y$ (km) | $b$ (km) |
|--------------------|------------|------------|----------|
| Księżyc            | 1735.55    | 1735.324   | 1734.898 |
| Io (Jowisz)        | 1829.4     | 1819.3     | 1815.7   |
| Europa (Jowisz)    | 1564.13    | 1561.23    | 1560.93  |
| Mimas (Saturn)     | 207.4      | 196.8      | 190.6    |
| Enceladus (Saturn) | 256.6      | 251.4      | 248.3    |

Tabela 2. Pierwsze i drugie mimośrodky dla ciał niebieskich z Tabeli 1

| Ciało niebieskie | $e_x^2$    | $e_y^2$    | $e_e^2$    | $e'_x^2$   | $e'_y^2$   | $e'_e^2$   |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Księżyc          | 0.00075121 | 0.00049091 | 0.00026042 | 0.00075177 | 0.00049116 | 0.00026049 |
| Io               | 0.01492151 | 0.00395365 | 0.01101139 | 0.01514753 | 0.00396934 | 0.01113399 |
| Europa           | 0.00408755 | 0.00038428 | 0.00370469 | 0.00410432 | 0.00038442 | 0.00371847 |
| Mimas            | 0.15544432 | 0.06201562 | 0.09960581 | 0.18405455 | 0.06611584 | 0.11062467 |
| Enceladus        | 0.06364586 | 0.02450984 | 0.04011934 | 0.06797200 | 0.02512567 | 0.04179617 |

Tabela 3 zawiera zestandaryzowane czasy wykonania procedur numerycznych (czcionka „bold”) względem jednego z algorytmów Feltensa oznaczonego dalej jako Feltens (2). Poza standaryzowanym czasem wykonania poniższa tabela zawiera również informacje o średniej (w nawiasach), maksymalnej (indeks górny) i minimalnej (indeks dolny) liczbie iteracji potrzebnej do osiągnięcia kryterium przerwania iteracji (osiągnięcie założonej dokładności lub przekroczenie dopuszczalnej liczby iteracji).

Tabela 3. Standaryzowane czasy wykonania procedur numerycznych względem algorytmu Feltensa, Feltens (2)

| Ciało niebieskie | Feltens (1)                                    | Feltens (2)                                  | Feltens (3)                                   | Ligas (1)                                    | Ligas (2)                                    | Ligas (3)                                    |
|------------------|--|--|---|--|--|--|
| Księżyc          | <b>1.02</b> (3.00) <sup>3</sup> <sub>1</sub>   | <b>1.00</b> (3.00) <sup>3</sup> <sub>1</sub> | <b>1.00</b> (3.00) <sup>3</sup> <sub>1</sub>  | <b>1.17</b> (2.70) <sup>3</sup> <sub>1</sub> | <b>1.17</b> (2.70) <sup>3</sup> <sub>1</sub> | <b>1.17</b> (2.70) <sup>3</sup> <sub>1</sub> |
| Io               | <b>1.05</b> (5.09) <sup>6</sup> <sub>1</sub>   | <b>1.00</b> (4.84) <sup>5</sup> <sub>1</sub> | <b>1.01</b> (4.96) <sup>6</sup> <sub>1</sub>  | <b>0.91</b> (2.99) <sup>3</sup> <sub>1</sub> | <b>0.91</b> (2.99) <sup>3</sup> <sub>1</sub> | <b>0.91</b> (2.99) <sup>3</sup> <sub>1</sub> |
| Europa           | <b>1.02</b> (3.97) <sup>4</sup> <sub>1</sub>   | <b>1.00</b> (3.94) <sup>4</sup> <sub>1</sub> | <b>1.00</b> (3.94) <sup>4</sup> <sub>1</sub>  | <b>1.04</b> (2.93) <sup>3</sup> <sub>1</sub> | <b>1.04</b> (2.93) <sup>3</sup> <sub>1</sub> | <b>1.04</b> (2.93) <sup>3</sup> <sub>1</sub> |
| Mimas            | <b>1.25</b> (10.29) <sup>12</sup> <sub>1</sub> | <b>1.00</b> (8.11) <sup>9</sup> <sub>1</sub> | <b>1.10</b> (9.15) <sup>11</sup> <sub>1</sub> | <b>0.71</b> (3.62) <sup>4</sup> <sub>1</sub> | <b>0.70</b> (3.57) <sup>4</sup> <sub>1</sub> | <b>0.71</b> (3.59) <sup>4</sup> <sub>1</sub> |
| Enceladus        | <b>1.13</b> (6.95) <sup>8</sup> <sub>1</sub>   | <b>1.00</b> (6.01) <sup>7</sup> <sub>1</sub> | <b>1.07</b> (6.62) <sup>8</sup> <sub>1</sub>  | <b>0.78</b> (2.99) <sup>4</sup> <sub>1</sub> | <b>0.78</b> (2.99) <sup>4</sup> <sub>1</sub> | <b>0.78</b> (2.99) <sup>4</sup> <sub>1</sub> |

Tabele 4 i 5 przedstawiają dokładność przeliczenia współrzędnych kartezjańskich na geodezyjne mierzoną maksymalną bezwzględną różnicą między szerokością i długością geodezyjną punktów wygenerowanej siatki, a ich przeliczonymi odpowiednikami dla około 1 400 000 punktów. Wyniki przedstawiono na skali logarytmicznej (po przejściu na skalę liniową wyniki wyrażone w sekundach stopniowych).

Tabela 4. Maksymalny błąd szerokości geodezyjnej (planetograficznej)

| Ciało niebieskie | Feltens (1) | Feltens (2) | Feltens (3) | Ligas (1) | Ligas (2) | Ligas (3) |
|------------------|-------------|-------------|-------------|-----------|-----------|-----------|
| Księżyc          | -7.9        | -8.6        | -7.9        | -12.4     | -12.4     | -12.4     |
| Io               | -6.6        | -6.7        | -6.6        | -12.4     | -12.4     | -12.4     |
| Europa           | -7.2        | -7.2        | -7.1        | -12.4     | -12.4     | -12.4     |
| Mimas            | -4.7        | -4.8        | -4.4        | -11.5     | -11.4     | -11.5     |
| Enceladus        | -5.1        | -5.3        | -5.0        | -11.8     | -11.8     | -11.8     |

Tabela 5. Maksymalny błąd długości geodezyjnej (planetograficznej)

| Ciało niebieskie | Feltens (1) | Feltens (2) | Feltens (3) | Ligas (1) | Ligas (2) | Ligas (3) |
|------------------|-------------|-------------|-------------|-----------|-----------|-----------|
| Księżyc          | -7.6        | -5.9        | -5.9        | -12.4     | -12.4     | -12.4     |
| Io               | -4.2        | -4.4        | -4.3        | -12.2     | -12.1     | -12.4     |
| Europa           | -4.7        | -4.8        | -4.7        | -12.4     | -12.4     | -12.4     |
| Mimas            | -2.3        | -2.5        | -2.4        | -11.3     | -8.9      | -11.5     |
| Enceladus        | -2.7        | -2.9        | -2.9        | -9.5      | -9.9      | -11.7     |

Dokładność kątowna jako maksymalna bezwzględna różnica między znaną szerokością (długością) geodezyjną (planetograficzną) a szerokością (długością) obliczoną na podstawie poszczególnych algorytmów przedstawiona na skali logarytmicznej

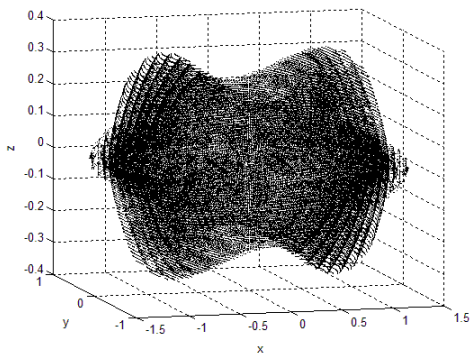
Wyniki przedstawione w tabeli 3 wskazują, że pod względem czasu wykonania procedur numerycznych we wszystkich wariantach autorski algorytm konwersji współrzędnych zachowuje stabilność (brak znaczących różnic między wariantami) w przeciwieństwie do algorytmu Feltensa. Porównanie standaryzowanego czasu wykonania między algorytmem



autorskim a algorytmem Feltensa wskazuje na zdecydowaną przewagę pierwszego wspomnianego w przypadku trzech ciał niebieskich: Io, Mimas, Enceladus. Konfrontując te wyniki z geometrycznymi parametrami zawartymi w tabelach 1 i 2 od razu zauważa się, iż są to ciała „prawdziwie” trójosiowe, co świadczy, iż autorski algorytm spełnia swoje zadanie. Pod względem dokładności, wyniki zestawione w tabelach 4 i 5 nie pozostawiają wątpliwości. Autorski algorytm zapewnia wysoką dokładność przeliczenia współrzędnych we wszystkich przypadkach, w przeciwieństwie do algorytmu Feltensa, choć widać nieznaczną utratę dokładności w przypadku długości geodezyjnej dla bardziej trójosiowych obiektów, takich jak Mimas i Enceladus (w dwóch wariantach autorskiego algorytmu). W przypadku analizowanych ciał niebieskich podano również obszary braku zbieżności autorskiego algorytmu zlokalizowane w pobliżu centrów analizowanych ciał (Tabela 6). Wielkość wspomnianego obszaru braku zbieżności jest silnie skorelowana z parametrami kształtu (mimośrodami) elipsoid. Dla dwóch ciał niebieskich: Księżyc (najbardziej sferyczny) oraz Mimas (najbardziej trójosiowy) przedstawiono również kształt obszaru niezbieżności (Rysunki 2 i 3).

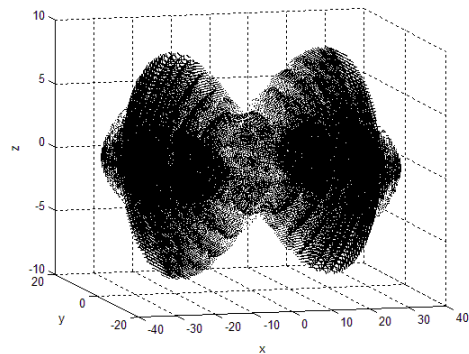
Tabela 6. Obszary braku zbieżności algorytmów, graniczne wysokości geodezyjne

| Ciało niebieskie | Obszar braku zbieżności   |
|------------------|---|
| Księżyc          | Graniczna wysokość $h = \approx - 1734\text{km}$ ( $0.999b$ ), obszar braku zbieżności zawarty w prostopadłościanie o przybliżonych wymiarach: $-1.5\text{km} < x < 1.5\text{km}$ , $-1\text{km} < y < 1\text{km}$ , $-0.4\text{km} < z < 0.4\text{km}$ |
| Io               | Graniczna wysokość $h = \approx - 1798\text{km}$ ( $0.990b$ ), obszar braku zbieżności zawarty w prostopadłościanie o przybliżonych wymiarach: $-30\text{km} < x < 30\text{km}$ , $-20\text{km} < y < 20\text{km}$ , $-8\text{km} < z < 8\text{km}$     |
| Europa           | Graniczna wysokość $h = \approx - 1554\text{km}$ ( $0.996b$ ), obszar braku zbieżności zawarty w prostopadłościanie o przybliżonych wymiarach: $-8\text{km} < x < 8\text{km}$ , $-5\text{km} < y < 5\text{km}$ , $-2\text{km} < z < 2\text{km}$         |
| Mimas            | Graniczna wysokość $h = \approx - 170\text{km}$ ( $0.892b$ ), obszar braku zbieżności zawarty w prostopadłościanie o przybliżonych wymiarach: $-40\text{km} < x < 40\text{km}$ , $-20\text{km} < y < 20\text{km}$ , $-10\text{km} < z < 10\text{km}$    |
| Enceladus        | Graniczna wysokość $h = \approx - 237\text{km}$ ( $0.954b$ ), obszar braku zbieżności zawarty w prostopadłościanie o przybliżonych wymiarach: $-20\text{km} < x < 20\text{km}$ , $-10\text{km} < y < 10\text{km}$ , $-5\text{km} < z < 5\text{km}$      |



Rysunek 2. Księżyc – region braku zbieżności, [km]

Źródło: Ligas (2012)



Rysunek 3. Mimas – region braku zbieżności, [km]

Źródło: Ligas (2012)

Kontynuacja prac nad rozwojem algorytmów zamiany współrzędnych kartezjańskich na geodezyjne dotyczących elipsoid trójosiowych zaowocowała kolejnym artykułem oznaczonym w cyklu publikacji jako [2]. W pracy tej przedstawiono uogólnienie metody Lin i Wang (MLW) (Lin i Wang, 1995) oraz metody Hedgley'a (MH) (Hedgley, 1976). Oryginalnie metody te dotyczą elipsoidy obrotowej, w wymienionej pracy zostały zmodyfikowane, aby rozwiązać zadanie konwersji dla elipsoidy trójosiowej. Zaprezentowane algorytmy polegają na rozwiązaniu nieliniowego równania ze względu na jeden parametr (współczynnik proporcjonalności „m” w metodzie MLW lub mnożnik Lagrange'a „α” w metodzie MH). Wspomniane równania nieliniowe można przedstawić w następującej postaci:

MLW

$$f(m) = \frac{x_G^2}{\left(a_x + \frac{2m}{a_x}\right)^2} + \frac{y_G^2}{\left(a_y + \frac{2m}{a_y}\right)^2} + \frac{z_G^2}{\left(b + \frac{2m}{b}\right)^2} - 1 = 0 \quad (9)$$

MH

$$f(\alpha) = \frac{x_G^2}{\left(a_x + \frac{\alpha}{a_x}\right)^2} + \frac{y_G^2}{\left(a_y + \frac{\alpha}{a_y}\right)^2} + \frac{z_G^2}{\left(b + \frac{\alpha}{b}\right)^2} - 1 = 0 \quad (10)$$

Łatwo zauważyć zależność między parametrami obydwu metod,  $\alpha = 2m$ , a co za tym idzie ich równoważność, mimo różnych podejść prowadzących do przedstawionych równań. W celu rozwiązania powyższych równań zastosowano metodę Newtona:

$$p_{i+1} = p_i - \frac{f(p_i)}{f'(p_i)} \quad (11)$$

gdzie:  $p$  oznacza parametr  $m$  lub  $\alpha$ , zależnie od algorytmu.

Z początkowymi wartościami „ $m$ ” i „ $\alpha$ ” inicjującymi proces iteracyjny równymi:

$$m^0 = \frac{b(r-b)}{2}, \quad \alpha^0 = b(r-b) \quad (12a, b)$$

gdzie:  $r = \sqrt{x_G^2 + y_G^2 + z_G^2}$

Ostateczne wartości „ $m$ ” lub „ $\alpha$ ” z procesu iteracyjnego wykorzystuje się w poniższych formułach reprezentujących współrzędne punktu na powierzchni elipsoidy trójosiowej będącego rzutem punktu wzdłuż normalnej.

$$x_E = \frac{x_G}{1 + \frac{2m}{a_x^2}} = \frac{x_G}{1 + \frac{\alpha}{a_x^2}}, \quad y_E = \frac{y_G}{1 + \frac{2m}{a_y^2}} = \frac{y_G}{1 + \frac{\alpha}{a_y^2}}, \quad z_E = \frac{z_G}{1 + \frac{2m}{b^2}} = \frac{z_G}{1 + \frac{\alpha}{b^2}} \quad (13a, b, c)$$

Współrzędne te w kolejnym kroku wykorzystywane są do obliczenia współrzędnych ( $\varphi, \lambda, h$ ) zgodnie ze wzorami (6), (7) oraz wysokości elipsoidalnej jako:

$$h = \text{sign}(m) \cdot |\mathbf{h}| = \text{sign}(\alpha) \cdot |\mathbf{h}| \quad (14)$$

W omawianej publikacji podano również wyrażenia na obliczenie długości geodezyjnej opierając się na formułach dla elipsoidy obrotowej wprowadzonych przez Vermeille’a (Vermeille, 2004). Unikają one sytuacji zerującego się mianownika pojawiających się podczas użycia wzoru (7).

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left[ \frac{(1 - e_e^2) x_E}{\sqrt{(1 - e_e^2)^2 x_E^2 + y_E^2 + y_E}} \right], \quad \text{dla } y_E \geq 0 \quad (15a)$$

$$\lambda = -\frac{\pi}{2} + 2 \arctan \left[ \frac{(1 - e_e^2) x_E}{\sqrt{(1 - e_e^2)^2 x_E^2 + y_E^2 - y_E}} \right], \quad \text{dla } y_E < 0 \quad (15b)$$

W przypadku zmodyfikowanych algorytmów wybrano nieco inny zestaw testowych ciał niebieskich, których parametry geometryczne zawarto w tabelach 7 i 8.

Tabela 7. Ciała niebieskie i ich parametry geometryczne

| Ciało niebieskie  | $a_x$ (km) | $a_y$ (km) | $b$ (km) |
|-------------------|------------|------------|----------|
| Ziemia            | 6378.172   | 6378.103   | 6356.753 |
| Księżyc           | 1735.55    | 1735.324   | 1734.898 |
| Mimas             | 207.4      | 196.8      | 190.6    |
| Miranda (Uran)    | 240.4      | 234.2      | 232.9    |
| Ariel (Uran)      | 581.1      | 577.9      | 577.7    |
| Amalthea (Jowisz) | 125        | 73         | 64       |

Tabela 8. Pierwsze i drugie mimośrodki dla ciał niebieskich z Tabeli 7

| Ciało niebieskie | $e_x^2$    | $e_y^2$    | $e_e^2$    | $e'_x{}^2$ | $e'_y{}^2$ | $e'_e{}^2$ |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Ziemia           | 0.00670507 | 0.00668358 | 0.00002164 | 0.00675033 | 0.00672855 | 0.00002164 |
| Księżyc          | 0.00075121 | 0.00049091 | 0.00026042 | 0.00075177 | 0.00049116 | 0.00026049 |
| Mimas            | 0.15544432 | 0.06201562 | 0.09960581 | 0.18405455 | 0.06611584 | 0.11062467 |
| Miranda          | 0.06142269 | 0.01107081 | 0.05091556 | 0.06544234 | 0.01119475 | 0.05364702 |
| Ariel            | 0.01166771 | 0.00069204 | 0.01098327 | 0.01180545 | 0.00069252 | 0.01110524 |
| Amalthea         | 0.73785600 | 0.23137549 | 0.65894400 | 2.81469727 | 0.30102539 | 1.93206981 |

Analiza zmodyfikowanych algorytmów konwersji współrzędnych przebiegała podobnie jak w przypadku algorytmów prezentowanych w [1], stąd podane zostaną tutaj tylko wyniki wraz z komentarzem na temat efektywności wprowadzonych algorytmów. Tabela 9 zawiera zestandaryzowane czasy wykonania procedur numerycznych (łącznie dla zakresów wysokości elipsoidalnych:  $-b/4$ ,  $-b/8$ ,  $-b/10$ ,  $-b/25$ ,  $0$ ,  $b/25$ ,  $b/10$ ,  $b/8$ ,  $b/4$ ,  $b/2$ ,  $b$ ,  $5b$ ,  $10b$ ) w odniesieniu do najszybszego wariantu algorytmu Feltensa (Feltens, 2009) oznaczonego dalej jako Feltens (2).

Tabela 9. Standaryzowane czasy wykonania procedur numerycznych względem algorytmu Feltensa, Feltens (2)

| Ciało niebieskie | Feltens (2) | MLW  | MH   |
|------------------|-------------|------|------|
| Ziemia           | 1           | 0.73 | 0.73 |
| Księżyc          | 1           | 0.87 | 0.87 |
| Mimas            | 1           | 0.57 | 0.57 |
| Miranda          | 1           | 0.63 | 0.63 |
| Ariel            | 1           | 0.70 | 0.70 |
| Amalthea         | 1           | 0.26 | 0.26 |

Powyzsza tabela ujawnia znaczącą przewagę zmodyfikowanych algorytmów względem najszybszego wariantu Feltensa. Konfrontując wyniki zawarte w tabeli 9 z mimośrodami modeli ciał niebieskich zawartych w tabeli 8 widać również, iż przewaga czasowa nowych algorytmów zwiększa się dla ciał bardziej trójosiowych. W tabelach 10, 11, 12 i 13 zestawiono maksymalne błędy konwersji dla szerokości i długości geodezyjnej. Wyniki przedstawiono na skali logarytmicznej (po przejściu na skalę liniową wyniki wyrażone w sekundach stopniowych). Nowe algorytmy zapewniają wysoką dokładność przeliczenia współrzędnych we wszystkich przypadkach, znacznie przewyższając pod tym względem algorytmy zaproponowane przez Feltensa. Wyjątkiem jest jedynie ekstremalnie „trójosiowy” model dla Amalthei, gdzie widać nieznaczną utratę dokładności zarówno dla szerokości jak i długości geodezyjnej.

Tabela 10. Maksymalny błąd szerokości geodezyjnej (planetograficznej)

| Ciało niebieskie | Feltens (1) | Feltens (2) | Feltens (3) | MLW   | MH    |
|------------------|-------------|-------------|-------------|-------|-------|
| Ziemia           | -7.5        | -7.5        | -7.5        | -12.4 | -12.4 |
| Księżyc          | -7.8        | -8.2        | -7.8        | -12.4 | -12.4 |
| Mimas            | -4.6        | -4.8        | -4.4        | -12.1 | -12.1 |
| Miranda          | -5.0        | -5.1        | -4.9        | -12.4 | -12.4 |
| Ariel            | -6.2        | -6.2        | -6.1        | -12.4 | -12.4 |

Tabela 11. Maksymalny błąd długości geodezyjnej (planetograficznej)

| Ciało niebieskie | Feltens (1) | Feltens (2) | Feltens (3) | MLW   | MH    |
|------------------|-------------|-------------|-------------|-------|-------|
| Ziemia           | -7.2        | -7.5        | -7.5        | -12.4 | -12.4 |
| Księżyc          | -6.6        | -5.9        | -5.9        | -12.4 | -12.4 |
| Mimas            | -2.2        | -2.4        | -2.3        | -12.4 | -12.4 |
| Miranda          | -2.7        | -2.7        | -2.7        | -12.4 | -12.4 |
| Ariel            | -3.8        | -3.8        | -3.8        | -12.4 | -12.4 |

Dokładność kątowna jako maksymalna bezwzględna różnica między znaną szerokością (długością) geodezyjną a szerokością (długością) obliczoną na podstawie poszczególnych algorytmów przedstawiona na skali logarytmicznej

W przypadku najbardziej „trójosiowego” ciała niebieskiego spośród testowanych warto przedstawić szczegółowe wyniki dla poszczególnych wysokości elipsoidalnych. Tabele 12 i 13 ujawniają, iż dwa spośród algorytmów Feltensa zawiodły. Algorytm Feltens (3) odtworzył współrzędne geodezyjne, ale trudno mówić, aby mógł stanowić konkurencję dla nowych algorytmów. Algorytmy te w tym przypadku nie poradziły sobie jedynie z przeliczeniem współrzędnych znajdujących się pod powierzchnią elipsoidy dla wysokości równej  $-b/4$  (graniczną wysokość elipsoidalną podano w tabeli 14). Jednakże, z praktycznego punktu widzenia przeliczanie współrzędnych dla dużych ujemnych wysokości elipsoidalnych nie ma znaczenia.

Tabela 12. Maksymalny błąd szerokości geodezyjnej (planetograficznej)

| Amalthea   | -1/4b | -1/8b | -1/10b | -1/25b | 0     | 1/25b | 1/10b | 1/8b  | 1/4b  | 1/2b  | b     | 5b    | 10b   |
|------------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Feltens(1) | -     | -     | -      | -      | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -4.4  | -4.6  |
| Feltens(2) | -     | -     | -      | -      | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -4.4  | -4.6  |
| Feltens(3) | 2.1   | 1.1   | 1.0    | 0.5    | 0.2   | -0.1  | -0.5  | -0.7  | -1.3  | -2.4  | -3.1  | -3.6  | -3.9  |
| MLW        | -     | -10.8 | -10.9  | -10.9  | -11.0 | -11.0 | -11.1 | -11.1 | -11.2 | -12.1 | -11.7 | -12.0 | -12.3 |
| MH         | -     | -10.8 | -10.9  | -10.9  | -11.0 | -11.0 | -11.1 | -11.1 | -11.2 | -12.1 | -11.7 | -12.0 | -12.3 |

Tabela 13. Maksymalny błąd długości geodezyjnej (planetograficznej)

| Amalthea   | -1/4b | -1/8b | -1/10b | -1/25b | 0     | 1/25b | 1/10b | 1/8b  | 1/4b  | 1/2b  | b     | 5b    | 10b   |
|------------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Feltens(1) | -     | -     | -      | -      | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -2.0  | -2.2  |
| Feltens(2) | -     | -     | -      | -      | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -     | -2.1  | -2.3  |
| Feltens(3) | 1.3   | 0.4   | 0.2    | -0.2   | -0.4  | -0.7  | -0.8  | -0.8  | -0.9  | -0.9  | -1.0  | -1.5  | -1.7  |
| MLW        | -     | -11.1 | -11.1  | -11.2  | -11.2 | -11.2 | -11.3 | -11.5 | -11.3 | -11.7 | -11.7 | -12.0 | -12.2 |
| MH         | -     | -11.1 | -11.1  | -11.2  | -11.2 | -11.2 | -11.3 | -11.5 | -11.3 | -11.7 | -11.7 | -12.0 | -12.3 |

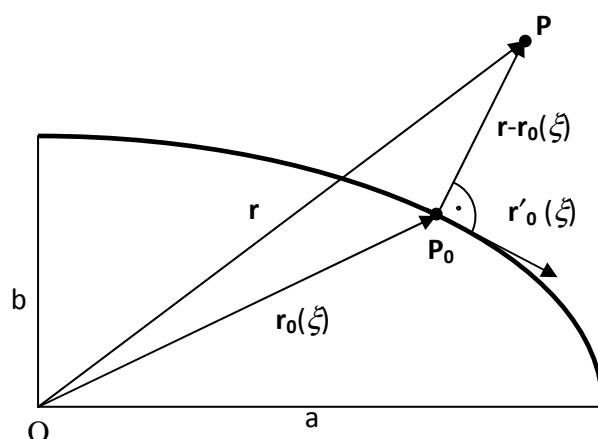
Podobnie jak w przypadku autorskiego algorytmu zawartego w [1] podano tutaj również graniczne wysokości elipsoidalne (ujemne - pod powierzchnią elipsoid trójosiowych), do których algorytmy zachowywały poprawność obliczeniową dla analizowanych ciał niebieskich (Tabela 14).

Tabela 14. Zakres stosowalności algorytmów MLW i MH dla testowanych ciał niebieskich

| Graniczna wysokość elipsoidalna | Ziemia                         | Księżyc                        | Mimas                         | Miranda                       | Ariel                         | Amalthea                     |
|---------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
|                                 | ≈-6295km<br>(≈0.990 <i>b</i> ) | ≈-1730km<br>(≈0.997 <i>b</i> ) | ≈-150km<br>(≈0.787 <i>b</i> ) | ≈-210km<br>(≈0.902 <i>b</i> ) | ≈-565km<br>(≈0.978 <i>b</i> ) | ≈-10km<br>(≈0.156 <i>b</i> ) |

Problem konwersji współrzędnych kartezjańskich ( $x, y, z$ ) na geodezyjne ( $\varphi, \lambda, h$ ) rozważany był również dla przypadku elipsoidy obrotowej. Spośród trzech publikacji na ten temat w głównej części autoreferatu przedstawiona zostanie jedna z nich. Opis pozostałych znaleźć można natomiast w kolejnym podrozdziale autoreferatu. W pracy [3] opisano uniwersalny wektorowy sposób wyprowadzenia „równania szerokości” niezależny od parametryzacji, wraz z jego rozwiązaniem (rozwiązaniami) oraz optymalizacją numeryczną (rozwiązanie rozwiązania Nurnberga; Nurnberg, 2006). Z rysunku 4 widać, iż najkrótszą odległość między punktem P a punktem  $P_0$  (wysokość elipsoidalna)  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(\xi)|$  (gdzie:  $\xi$  - dowolna szerokość) otrzymamy wówczas, kiedy wektor  $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(\xi)$  będzie prostopadły do wektora stycznego  $\mathbf{r}'_0(\xi)$ , czyli iloczyn skalarny tych dwóch wektorów będzie równy zero, co można zapisać jako:

$$[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(\xi)] \circ \mathbf{r}'_0(\xi) = 0 \quad (16)$$



Rysunek 4. Geometryczna prezentacja rozwiązania  
Źródło: Ligas (2013)

Wykorzystując powyższą zależność łatwo wyprowadzić „równania szerokości” dla dowolnej parametryzacji, stąd dla najczęściej używanych otrzymujemy:

„Równanie szerokości” – szerokość zredukowana ( $\psi$ ):

$$f(\psi) = (a^2 - b^2) \sin \psi \cos \psi - p \sin \psi + z b \cos \psi = 0 \quad (17)$$

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} \varphi = \arctan\left(\frac{\tan \psi}{\sqrt{1 - e^2}}\right) \\ h = \frac{p\sqrt{1 - e^2} \cos \psi + z \sin \psi - b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}} \end{cases} \quad (18)$$

„Równanie szerokości” – szerokość geodezyjna ( $\varphi$ ):

$$f(\varphi) = e^2 N \sin \varphi \cos \varphi - p \sin \varphi + z \cos \varphi = 0 \quad (19)$$

Rozwiązanie:

$\varphi$  - otrzymane bezpośrednio z rozwiązania powyższego równania

$$h = p \cos \varphi - a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} + z \sin \varphi \quad (20)$$

“Równanie szerokości” – szerokość geocentryczna ( $u$ ):

$$f(u) = e'^2 \rho \sin u \cos u - (1 + e'^2) p \sin u + z \cos u = 0 \quad (21)$$

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} \varphi = \arctan\left(\frac{\tan u}{1 - e^2}\right) \\ h = \frac{p(1 - e^2) \cos u + z \sin u - b \sqrt{1 - e^2 \sin^2 u}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} (2 - e^2)} \end{cases} \quad (22)$$

gdzie:

$p = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $N$  – promień krzywizny pierwszego wertykału,  $e$  – pierwszy mimośród

Powyższe równania szerokości oraz rozwiązanie ( $\varphi$ ,  $h$ ) zadania konwersji przedstawione są w ich podstawowej formie (mało oszczędnej ze względów numerycznych, z uwagi na użycie znaczącej liczby funkcji trygonometrycznych). W omawianej pracy można znaleźć zoptymalizowane wersje algorytmów konwersji dla różnych parametryzacji równania szerokości. Polegają one na wyrugowaniu funkcji trygonometrycznych oraz odpowiednim

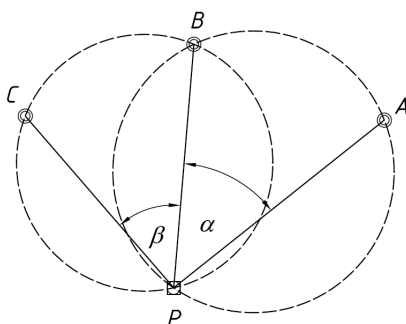
przedstawieniu funkcji iterujących tak, aby dodatkowo zminimalizować liczbę operacji dzielenia (takie podejście pochodzi z pracy Fukushima, 2006). Równania szerokości wynikające z różnych parametryzacji rozwiązywane były metodą Newtona (zbieżność kwadratowa) oraz metodą Halley'a (zbieżność sześcienna). Algorytm oparty na szerokości parametrycznej tożsamy jest z algorytmem Fukushima (2006). Warto również zwrócić uwagę na atrakcyjne wyrażenia na wysokość elipsoidalną zależną od współrzędnych kartezjańskich punktu przeliczanego oraz wybranej parametryzacji szerokości. Testy numeryczne 12 skonstruowanych algorytmów przeprowadzone dla dwóch zakresów wysokości elipsoidalnej: -10km – 10km (przypadek A) oraz 0km – 36000km (przypadek B) wykazały, iż żadna z najczęściej używanych parametryzacji nie ma istotnej przewagi nad pozostałymi pod względem czasu wykonania oraz otrzymywanych dokładności. Różnice wynikają jedynie z zastosowanej metody rozwiązywania równania nieliniowego (metoda Newton'a lub Halley'a) oraz sposobu przedstawienia funkcji iterującej. Warto zaznaczyć, iż niezależnie od przypadku (A lub B) wysokość elipsoidalna została odtworzona przez skonstruowane algorytmy z zadowalającą dokładnością. Dla przypadku A niezależnie od metody rozwiązania równania szerokości otrzymano satysfakcjonujące wyniki ( $3 \cdot 10^{-8}''$  dla metody Newton'a oraz  $10^{-11}''$  dla metody Halley'a) z przeliczenia około 2 900 000 punktów wykorzystując jedną iterację algorytmu. W przypadku B jedynie rozwiązanie równania szerokości algorytmami wykorzystującymi metodę Halley'a zapewnia odpowiedni poziom dokładności przeliczenia współrzędnych na poziomie  $5 \cdot 10^{-6}''$  (dokładność określona na podstawie przeliczenia około 5 000 000 punktów, dla jednej iteracji algorytmów). Dla metody Newton'a w tym przypadku otrzymano dokładność rzędu  $2 \cdot 10^{-3}''$ , co okazać się może niewystarczające dla większości zastosowań praktycznych.

Z tematem rozwiązywania problemów geometrycznych oraz optymalizacji algorytmów geodezji obliczeniowej związane jest również opracowanie nowego algorytmu rozwiązania geodezyjnego planarnego wcięcia wstecz. Prezentowany algorytm opiera się na tym samym kryterium, co np. metoda Cassiniego (Burtch, 2005; Blachut et al., 1979), gdzie szukane współrzędne punktu wcinanego uzyskuje się na podstawie przecięcia dwóch okręgów (Rysunek 5). Punkty przecięcia wspomnianych okręgów, z których jeden jest znany a drugi wyznaczany, otrzymuje się wprost z rozwiązania równania kwadratowego. Jednakże, ze względu na znajomość jednego z punktów przecięcia drugi może zostać szybko wyznaczony za pomocą wzorów Viete'a. W przypadku, gdy któryś z kątów  $\{\alpha, \beta\} = \{0^\circ, 180^\circ\}$  rozwiązanie



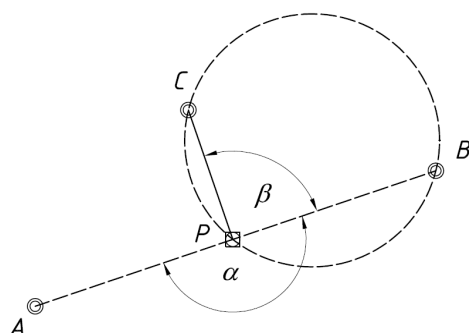
zadania sprowadza się do przecięcia okręgu i prostej (Rysunki 6, 7, 8). Te przypadki również prowadzą do równania drugiego stopnia, rozwiązywanego wzorami Viete’a. Opracowana metoda wykorzystuje tylko dwa wywołania funkcji trygonometrycznych oraz podstawowe operacje arytmetyczne (+, -, \*, /), co czyni algorytm atrakcyjnym z punktu widzenia aplikacji numerycznych. Dodatkowo, druga z formuł Viete’a dla równania kwadratowego może zostać bezpośrednio wykorzystana do kontroli obliczeń.

Mimo, iż obecnie w geodezji zagadnienie to nie ma już tak dużego znaczenia, to ciągle w literaturze można spotkać nowe sposoby jego rozwiązania np. Dekov (2012) - geodezja, Wildberger (2010) – matematyka, Font-Llagunes i Battle (2009) – robotyka. Szybkie i niezawodne rozwiązanie tego zadania stanowi istotny problem w robotyce, gdzie wykorzystywane jest do określania pozycji oraz orientacji robotów mobilnych na podstawie nadajników (ang. beacon) o znanym położeniu emitujących określone sygnały. W robotyce problem ten nazywany jest „triangulacją trójobiektową” lub po prostu „triangulacją”. Zaproponowany przeze mnie algorytm został sklasyfikowany na drugim miejscu pod względem szybkości wykonania w niezależnym studium porównawczym przeprowadzonym przez Pierlot oraz Van Droogenbroeck (*A new three object triangulation algorithm for mobile robot positioning*, IEEE Transaction on Robotics, vol. 30, iss. 3, pp. 566 – 577). Tabela 15 zaczerpnięta ze wspomnianej pracy zawiera porównanie 18 algorytmów „wcięcia wstecz” (ze względu na czas wykonania procedur numerycznych i liczbę zastosowanych operacji matematycznych). Warto zauważyć, że kilka z porównywanych algorytmów wywodzi się ze społeczności geodezyjnej.



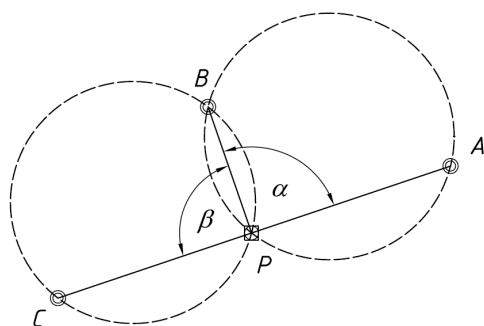
Rysunek 5. Wcięcie wstecz, przecięcie dwóch okręgów, przypadek regularny

Źródło: Ligas (2013)



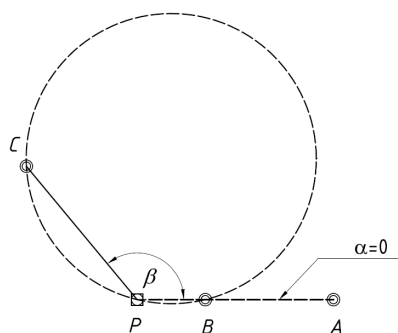
Rysunek 6. Wcięcie wstecz, przypadek  $\alpha = 180^\circ$  (pseudo - osobliwy), przecięcie prostej i okręgu

Źródło: Ligas (2013)



Rysunek 7. Wcięcie wstecz, przypadek  $\alpha = 180^\circ$  (pseudo - osobliwy), zamiana kątów, przecięcie dwóch okręgów

Źródło: Ligas (2013)



Rysunek 8. Wcięcie wstecz, przypadek  $\alpha = 0^\circ$  (pseudo - osobliwy), przecięcie prostej i okręgu

Źródło: Ligas (2013)

Tabela 15. Porównanie 18 algorytmów „wcięcia wstecz” (ze względu na czas wykonania procedur numerycznych i liczbę zastosowanych operacji matematycznych), źródło: Pierlot i Van Droogenbroeck, (2014)

| Algorithm                       | +  | ×  | / | $\sqrt{x}$ | trigo | time (s) † |
|---------------------------------|----|----|---|------------|-------|------------|
| ToTal <sup>1</sup>              | 30 | 17 | 2 | 0          | 2     | 0.163      |
| [26] Ligas <sup>1</sup>         | 29 | 22 | 2 | 0          | 2     | 0.171      |
| [18] Font-Llagunes <sup>1</sup> | 23 | 17 | 2 | 0          | 5     | 0.228      |
| [9] Cassini <sup>2</sup>        | 19 | 8  | 3 | 0          | 4     | 0.249      |
| [10] Cohen <sup>1</sup>         | 37 | 15 | 3 | 2          | 4     | 0.272      |
| [12] Easton <sup>2</sup>        | 22 | 24 | 1 | 0          | 5     | 0.298      |
| [32] McGillem <sup>1</sup>      | 37 | 18 | 5 | 2          | 8     | 0.340      |
| [21] Hmam <sup>2</sup>          | 29 | 11 | 3 | 3          | 9     | 0.428      |
| [10] Cohen <sup>2</sup>         | 26 | 11 | 3 | 2          | 11    | 0.437      |
| [16] Esteves <sup>2</sup>       | 43 | 14 | 2 | 2          | 11    | 0.471      |
| [9] Collins <sup>2</sup>        | 34 | 10 | 2 | 2          | 11    | 0.485      |
| [32] McGillem <sup>2</sup>      | 29 | 9  | 3 | 2          | 11    | 0.501      |
| [9] Kaestner <sup>2</sup>       | 28 | 10 | 3 | 2          | 11    | 0.504      |
| [45] Tsukiyama <sup>1</sup>     | 52 | 22 | 3 | 5          | 14    | 0.596      |
| [46] Zalama <sup>1</sup>        | 52 | 21 | 4 | 5          | 14    | 0.609      |
| [35] Tienstra <sup>2</sup>      | 33 | 18 | 8 | 3          | 9     | 0.640      |
| [19] Font-Llagunes <sup>1</sup> | 62 | 25 | 6 | 1          | 8     | 0.648      |
| [29] Madsen <sup>2</sup>        | 38 | 24 | 5 | 3          | 15    | 0.707      |

† For  $10^6$  executions on an Intel(R) Core(TM) i7 920 @ 2.67GHz.

<sup>1</sup> Geometric circle intersection

<sup>2</sup> Trigonometric solution

Table I  
COMPARISON OF VARIOUS TRIANGULATION ALGORITHMS TO OUR  
ToTal ALGORITHM.

Z próbą szeroko rozumianej optymalizacji metod obliczeniowych w geodezji związane są również moje publikacje oznaczone numerami [5], [6] oraz [7]. Pierwsza z nich dotyczy teoretycznego porównania geostatystycznej metody krigingu prostego z wykorzystywaną pierwotnie w geodezji fizycznej predykcją metodą najmniejszych kwadratów. Porównanie to ma znaczenie praktyczne ze względu na powszechność oprogramowania geostatystycznego

w porównaniu z oprogramowaniem dedykowanym zagadnieniom predykcyjnym geodezji fizycznej. Publikacja [7] dotyczy zastosowania lokalnej metody krigingu zmierzającej do podniesienia dokładności względem jej klasycznego, globalnego odpowiednika, w procesie modelowania geoidy geometrycznej. Z kolei publikacja oznaczona numerem [6] przedstawia procedurę konstrukcji oraz weryfikacji modelu wielomianowego transformacji wysokości.

Omówienie wyżej wymienionych publikacji, zwłaszcza treści zawartych w [5] poprzedzone zostanie krótkim rysem historycznym dotyczącym rozwoju metod predykcyjnych bazujących na teorii funkcji losowych.

Pionierskie prace Wienera i Kołmogorowa (lata 40 XX wieku) dotyczące teorii predykcji stacjonarnych szeregów czasowych stały się podstawą ogólniejszych metod, które rozwijano w latach 50 i 60 XX wieku. W geodezji fizycznej, jako pierwsza pojawiła się predykcja metodą najmniejszych kwadratów (Moritz, 1967), która była bezpośrednią aplikacją formuły Wienera – Kołmogorowa (W-K) dla dziedziny przestrzennej. Rozwinięta później przez Krarupa (po sugestii Moritza) (Krarup, 1969) i nazwana w ogólnej wersji „kolokacją metodą najmniejszych kwadratów”. Predykcja metodą najmniejszych kwadratów pierwotnie stosowana była do interpolacji anomalii grawimetrycznych. Kolokacja najmniejszych kwadratów opracowana została natomiast do rozwiązania ogólniejszego problemu predykcji dowolnego funkcjonału potencjału zakłócającego. Mniej więcej w tym samym czasie pojawił się kriging (nazwa rodziny metod predykcji pochodząca od nazwiska południowoafrykańskiego inżyniera, pioniera metod (geo) statystycznych w opróbowaniu złóż D. G. Krige'a). Pionierskie prace Krige'a trafiły w ręce G. Matherona, który nadał metodom geostatystycznym obecny kształt. Kriging to nazwa określająca całą rodzinę metod predykcji: liniowych i nieliniowych, jednowymiarowych (skalarne pola losowe) i wielowymiarowych (wektorowe pola losowe). Kriging szybko znalazł zastosowanie w hydrologii, teledetekcji, leśnictwie i wielu innych dziedzinach. Dwie wspomniane metody nie były odosobnione. W meteorologii Eliassen (1954) i Gandin (1963) stosowali podejście W-K do analizy pól meteorologicznych, Gandin nazwał metodę optymalną interpolacją. Bertil Matern znany głównie z "elastycznej" funkcji kowariancji stosował metody w leśnictwie (Matern, 1960). W 1950 roku C. R. Henderson amerykański statystyk (pionier w szacowaniu wartości genetycznej hodowli) wprowadził liniowy model mieszany. Natomiast w 1962 roku Goldberger opublikował artykuł na temat najlepszej liniowej nieobciążonej predykcji w uogólnionych modelach regresji liniowej. Dwie prace wspomniane jako ostatnie są

ogólniejsze niż wcześniej wymienione, ponieważ tworzą ogólny szkielet niezależny od charakteru dziedziny: przestrzennej czy też czasowej (lub czasowo-przestrzennej). Z pewnością lista nie jest wyczerpująca, ale świadczy o rozwoju podobnych pomysłów w różnych dziedzinach nauki. Dermanis (1984) w odniesieniu do kriginu i kolokacji pisał o „naukowej wieży babel” związanej z brakiem komunikacji interdyscyplinarnej.

W publikacji [5] (obecnie rozwijanej i uzupełnianej) dokonano porównania predykcji metodą najmniejszych kwadratów z kriginem prostym jak również wskazano, iż w przypadku gaussowskich pól losowych obydwie metody są tożsame z warunkową wartością oczekiwaną, czyli najlepszą predykcją. Krigin prosty pokrywa przypadek stałej lub zależnej od położenia (trend), ale znanej wartości oczekiwanej pola losowego. Ten przypadek nie został rozważony przez Dermanisa (Dermanis, 1984), stąd niepełne wnioski we wspomnianej jego pracy. W przypadku zerowej wartości oczekiwanej pola losowego krigin prosty jest tożsamy z predykcją metodą najmniejszych kwadratów, natomiast krigin prosty jako filtr jest podstawową formułą kolokacji. Ze względu na fakt, iż w społeczności geodezyjnej funkcja kowariancji jest funkcją dominującą (założenie stacjonarności rzędu drugiego) w pracy omówiłem również funkcję semiwariancji (semiwariogram), jako ogólniejszą funkcję struktury funkcji losowych. Semiwariogram, jako funkcja struktury procesu losowego obejmuje szerszą klasę zjawisk a dodatkowo jest wolny od znajomości wartości oczekiwanej funkcji losowej, co staje się dużą zaletą w momencie szacowania funkcji z danych (nie wprowadza się obciążenia związanego z szacowaniem wartości oczekiwanej). Natomiast trzeba dodać, iż w przypadku procesów stacjonarnych rzędu drugiego dwie funkcje – funkcja kowariancji i semiwariogram są równoważne. Mimo równoważności wyrażen (zarówno predykcji metodą najmniejszych kwadratów, kolokacji jak i różnych wariantów kriginu) powinno się pamiętać, że te dwie metody zyskiwały swoją dojrzałość w różnych polach zastosowań. W geodezji fizycznej, gdzie wszystkie wielkości są funkcjonalnie związane z potencjałem zakłócającym, wymagało konstrukcji prawa propagacji funkcji kowariancji dla funkcjonałów potencjału zakłócającego. Z drugiej strony w górnictwie i geologii, gdzie geostatystyka miała swój początek trudno by było mówić o funkcyjnej zależności między np.: koncentracją cynku i ołowiu. Warto tutaj wspomnieć artykuł Reguzzoniego (Reguzzoni et al., 2005), w którym podano prawo propagacji semiwariogramów dla funkcjonałów a metodę kriginu nazwano „kriginem ogólnym/uogólnionym”. Wykazanie tożsamości tych dwóch metod predykcji ma również

znaczenie praktyczne ze względu na wykorzystanie oprogramowania geostatystycznego, które z pewnością jest bardziej rozpowszechnione niż to dedykowane wyspecjalizowanej w analizie pola siły ciężkości kolokacji metodą najmniejszych kwadratów. Dopóki nie ma konieczności stosowania wyspecjalizowanych funkcji związanych z prawem propagacji kowariancji między funkcjami potencjału zakłócającego, w zastosowaniach geodezyjnych (zwłaszcza lokalnych) z powodzeniem można stosować oprogramowanie dedykowane metodom geostatystycznym. Podsumowując, można stwierdzić, iż metody te zostały opracowane, aby rozwiązywać inaczej postawione problemy i to stanowi różnicę między nimi.

Publikacja [6] dotyczy zagadnienia lokalnej transformacji między dwoma układami wysokości Kronsztadt'60 i Kronsztadt'86. W celu dokonania transformacji wysokości między ww. układami wykorzystano analizę trendu powierzchniowego (regresję wielomianową na współrzędne) metodę prostą i prawdopodobnie najczęściej wykorzystywaną w tym celu. W omawianej pracy poddano ten model wielu testom i analizom, aby zapewnić wysoką jakość transformacji wysokości, która docelowo miała stanowić narzędzie dla geodetów w powiecie krakowskim. W pracy poruszono problem poprawności numerycznej (złe uwarunkowanie macierzy w modelach wielomianowych) i związane z tym zagadnieniem przekształcenie współrzędnych wejściowych jako środek zaradczy, estymacji parametrów modelu, weryfikacji modelu, w tym testów statystycznych (analiza wariancji) odpowiadających na pytanie czy przejście z modeli niższego stopnia na stopień wyższy jest istotne statystycznie. Skonstruowane modele transformacji wysokości testowane były również metodą krosvalidacji „usuń jedną” (leave-one-out) w celu określenia ich zdolności predykcyjnych a zarazem określenia, które z punktów można traktować jako odstające. Zbudowano przedziały ufności dla powierzchni wielomianowej odzwierciedlającej powierzchnię różnic wysokości między analizowanymi układami wysokości oraz przedziały ufności dla nowo przewidywanych punktów. W pracy należało również określić wpływ dokładności identyfikacji horyzontalnej homologicznych punktów na dokładność samej funkcji transformującej. Dokładność określenia współrzędnych płaskich wahała się od kilku do kilkudziesięciu metrów. W celu określenia wpływu pozycji horyzontalnej na dokładność transformacji wysokości wykonano symulację polegającą na losowej zmianie położenia punktów dostosowania o 10, 50, 100 i 500 metrów w 8 kierunkach (N, NE, E, SE, ...) utrzymując oczywiście różnicę wysokości między układami przypisaną do właściwych

punktów. Za każdym razem przeliczano nowy model transformacji, łącznie 1000 razy, i każdorazowo wyniki konfrontowano z „oryginalnym” położeniem punktów. Symulacja wykazała, iż dla analizowanego zbioru danych nawet błąd identyfikacji sięgający 500 m powoduje różnicę między „oryginalnym” zbiorem danych a symulowanymi nie przekraczającą 0.04 mm, zatem nie ma praktycznego znaczenia w konstruowaniu modelu transformacji wysokości. Konfrontacja błędów predykcji otrzymanych z modelu (na poziomie  $\pm 2$  mm) z błędami rzeczywistymi (maksymalny błąd  $\pm 3.5$  mm) (test na 8 punktach o znanych wysokościach w obydwu układach) wykazała, iż błędy predykcji oferowane przez model są zbyt optymistyczne. Stąd, jako bardziej realistyczną miarę dokładności przyjętego modelu transformacji przyjęto połowę 95% przedziału ufności dla błędu prognozy, czyli wartość na poziomie  $\pm 5$  mm. Stosując średni błąd otrzymany z krosvalidacji (mniej optymistyczny) zamiast odchylenia standardowego reszt oferowanego przez metodę najmniejszych kwadratów w konstrukcji 95% przedziału ufności niepewność transformacji nowych punktów można oszacować na poziomie  $\pm 8$  mm.

W publikacji [7] porównano klasyczną metodę kriginu z kriginem w ruchomym oknie (obydwa warianty wykonywane były bezpośrednio na sferze) oraz zastosowano do predykcji przebiegu lokalnej/regionalnej geoidy geometrycznej. Predykcja wykonywana była dla dwóch wariantów danych: dla surowych undulacji geoidy, jak również undulacji rezydualnych powstałych z usunięcia z surowych wysokości geoidy globalnego trendu pochodzącego z modelu EGM2008. Zastosowanie kriginu ruchomego okna przynajmniej teoretycznie powinno przynieść zysk poprzez uwzględnienie lokalnie pojawiających się fluktuacji w danych, co powinno przełożyć się na ogólny zysk w dokładności predykcji. Kriging w ruchomym oknie (moving window kriging – MWK) został zaproponowany przez Haasa (1990). Celem metody jest adaptowanie się do lokalnych zmian w trendzie przestrzennym danych oraz/lub do niestacjonarności funkcji kowariancji. Otrzymuje się to poprzez ograniczenie predykcji do regionu scentrowanego na aktualnie przewidywanej lokalizacji. W każdym z podregionów (oknie) szacowana jest empiryczna funkcja kowariancji lub semiwariogram. W następnym etapie dozwolony model funkcji kowariancji lub semiwariogramu jest wpasowywany w empiryczny odpowiednik. Model teoretyczny staje się podstawą konstrukcji odpowiedniego układu równań kriginu. Stosowanie kriginu ruchomego okna niesie ze sobą pewien dodatkowy nakład obliczeniowy oraz trudność związaną z wielokrotnym szacowaniem funkcji struktury danych. Cała procedura musi zostać

zautomatyzowana, a ze względu na fakt, iż parametry funkcji struktury: „efekt samorodków” utożsamiany z wariancją szumu oraz z mikroskalową zmiennością zjawiska, częściowy próg utożsamiany z wariancją sygnału oraz zakres autokorelacji są wielkościami dodatnimi, spełniającymi pewne warunki, należy stosować odpowiednie metody wpasowania. W celu rozwiązania problemu automatyzacji wpasowania funkcji struktury autorzy zastosowali metodę najmniejszych kwadratów z ograniczeniami (least squares with bound constraints). Główną praktyczną różnicą pomiędzy krigingiem wykonywanym na płaszczyźnie a krigingiem wykonywanym na sferze jest fakt, że funkcja kowariancji (lub semiwariancji) nie jest funkcją odległości euklidesowej a odległości sferycznej.

$$\cos \psi = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \quad (23)$$

gdzie:

$\varphi, \lambda$  - szerokość i długość geograficzna

$\psi \in [0, \pi]$  – odległość sferyczna

Istotniejsze jest to, że nie wszystkie funkcje kowariancji stosowane na płaszczyźnie mogą zostać użyte na sferze. Funkcja kowariancji (funkcja dodatnio określona) na sferze musi dać się przedstawić w postaci (Schoenberg 1942, Roy 1973):

$$C(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \psi), \quad a_n \geq 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \quad (24)$$

gdzie:

$P_n(\cos \psi)$  - wielomiany Legendre’a

Okazuje się, że funkcje kowariancji (oraz semiwariogramy), powszechne w użyciu na płaszczyźnie, nie mogą być używane na sferze (ujemne współczynniki rozwinięcia w (24)). Na przykład transformata Radona modelu eksponencjalnego (modele Gaussa – Markowa rzędu drugiego oraz Gaussa – Markowa trzeciego rzędu) nie są dozwolone na sferze, tak samo jak model gaussowski funkcji kowariancji (Huang et al., 2011). Szeroki przegląd funkcji kowariancji dozwolonych na sferze można znaleźć na przykład w Gneiting (2013), Schlather (2015). W omawianej pracy jako funkcje struktury pola undulacji geoidy w predykcji geostatystycznej za pomocą krigingu zwyczajnego i uniwersalnego wykorzystano modele: sferyczny, eksponencjalny oraz kubiczny. Skuteczność porównywanych metod testowana

była na trzech polach doświadczalnych charakteryzujących się zróżnicowanym zasięgiem oraz ilością dostępnych punktów pomiarowych (Tabela 16, dane: GPS/benchmark data set for GEOID12B pochodzą z NGS – <http://www.ngs.noaa.gov>).

Tabela 16. Charakterystyka trzech pól doświadczalnych ze względu na zasięg obszarowy oraz liczbę punktów treningowych i testowych

| Charakterystyka             | TF1                       | TF2                       | TF3                         |
|-----------------------------|---------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| Powierzchnia                | ≈ 225 000 km <sup>2</sup> | ≈ 575 000 km <sup>2</sup> | ≈ 1 350 000 km <sup>2</sup> |
| Liczba punktów treningowych | 3157                      | 1318                      | 710                         |
| Liczba punktów testowych    | 381                       | 92                        | 54                          |

W przypadku pola testowego TF1, najmniejszego obszarowo z dużą liczbą punktów pomiarowych różnica między predykcją opartą na surowych undulacjach i undulacjach rezydualnych (wynikających z użycia EGM2008) jest znikoma. Różnica ta ujawnia się wydatnie dla dwóch pozostałych pól testowych (TF2, TF3). W przypadku TF2 zysk dokładności z wykorzystaniem modelu EGM08 jest dwukrotny (spadek błędu maksymalnego z ≈ 25 cm do ≈ 11 cm oraz błędu średniego z ≈ 7 cm do ≈ 3 cm). Dla pola doświadczalnego TF3 można zaobserwować około siedmiokrotną poprawę dokładności (spadek błędu maksymalnego z ≈ 100 cm do ≈ 13 cm oraz błędu średniego z ≈ 25 cm do ≈ 4 cm). Jeśli chodzi o użycie kriginu poruszającego się okna do modelowania pola undulacji (na surowych danych) można wyciągnąć wniosek, iż jego adaptacja do danych mierzona zyskiem dokładności uwidacznia się wraz z powiększającymi się rozmiarami pól testowych i zmianą gęstości punktów pomiarowych. W przypadku pola TF1, różnice w charakterystykach dokładnościowych są znikome, rzędu milimetra. Dla pola TF2, otrzymano zysk kilkumilimetrowy, natomiast dla pola TF3 zysk przejawia się dziesiątkami milimetrów. Natomiast wykorzystanie kriginu w poruszającym się oknie łącznie z undulacjami rezydualnymi pochodzącymi z zastosowania modelu EGM08, w przypadku TF1 nie przyniosło żadnej poprawy w dokładności modelowania pola undulacji. Otrzymano praktycznie identyczne charakterystyki dokładnościowe dla dwóch wariantów kriginu. Podobne wyniki uzyskano dla pola oznaczonego TF2 (poprawa mierzona ułamkami milimetra). Różnica ujawniła się dopiero na najrozleglejszym obszarowo polu testowym TF3, gdzie uzyskano widoczny zysk dokładności przy zastosowaniu kriginu poruszającego się okna (spadek błędu maksymalnego z ≈ 131 mm do ≈ 126 mm oraz błędu średniego z ≈ 43 mm do ≈ 40 mm). Otrzymane wyniki potwierdzają, iż zastosowany wariant kriginu może przyczynić się do poprawienia dokładności konstruowanych lokalnych/regionalnych modeli geoidy



geometrycznej (oraz do dowolnych zadań predykcyjnych koniecznych w geodezji). W świetle publikacji [5] można dodać, iż w miejsce krigingu można zastosować kolokację metodą najmniejszych kwadratów (często faworyzowaną w literaturze geodezyjnej) otrzymując te same wyniki. Ewentualne różnice wynikałyby jedynie z implementacji różnych algorytmów numerycznych rozwiązujących poszczególne podproblemy składające się na całą procedurę predykcyjną.

## Bibliografia

- Blachut T., Chrzanowski A., Saastamoinen J., (1979), *Urban surveying and mapping*, Springer
- Burtch, R., (2005), *Three point resection problem. Surveying computations*, course notes 2005/2006
- Burša M., Šima Z., (1980), *Tri-axiality of the Earth, the Moon and Mars*, Stud. Geoph. et Geod., 24(3), 211–217
- Burša M., Fialova V., (1993), *Parameters of the Earth's tri-axial level ellipsoid*, Stud. Geoph. et Geod., 37(1), 1–13
- Dekov D., (2012), *A numerical method for solving the horizontal resection problem in surveying*, J. Geodetic Sci., 2(1), 65-67.
- Dermanis A., (1984), *Kriging and collocation – a comparison*, Manuscripta Geodaetica, vol. 9, 159 – 167
- Eliassen A., (1954), *Provisional report on calculation of spatial covariance and autocorrelation of the pressure field*, Rapport nr.5, Videnskaps - Akademiets Institut for Vaer - Og Klimaforskning, Oslo, Norway
- Feltens J., (2008), *Vector methods to compute azimuth, elevation, ellipsoidal normal and the Cartesian (X, Y, Z) to geodetic ( $\varphi, \lambda, h$ ) transformation*, Journal of Geodesy, 82(8), 493 – 504
- Feltens J., (2009): *Vector method to compute the Cartesian (X, Y, Z) to geodetic ( $\varphi, \lambda, h$ ) transformation on a triaxial ellipsoid*. J Geod 83: 129–137
- Font-Llagunes J.M., Batlle A., (2009), *New method that solves the three – point resection problem using straight lines intersection*, J. Surv. Eng., 135(2), 39-45.
- Fukushima T., (2006), *Transformation from Cartesian to geodetic coordinates accelerated by Halley's method*, Journal of Geodesy, 79, 689–693
- Gandin L., (1965), *Objective analysis of meteorological fields*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem
- Gneiting T., 2013, *Strictly and non-strictly positive definite functions on spheres*. Bernoulli, 19 (4), 1327–1349.
- Goldberger A.S., (1962), *Best Linear Unbiased Prediction in the Generalized Linear Regression Model*, Journal of the American Statistical Association, 57(298), 369–375

- Haas T.C., (1990), *Kriging and automated variogram modeling within a moving window*, Atmospheric Environment, 24A (7), 1759 – 1769
- Hedgley D.R., (1976), *An exact transformation from geocentric to geodetic coordinates for nonzero altitudes*, NASA TR R-458 Washington
- Heiskanen A. W., Moritz H., (1967), *Physical Geodesy*, W. H. Freeman and Company, San Francisco.
- Henderson C.R., (1950), *Estimation of genetic parameters*, Ann Math Stat. (Abstract) 21: 309-310
- Huang C., Zhang H., Robeson S.M., (2011), *On the validity of commonly used covariance functions and variogram functions on the sphere*, Math Geosci, 43(6), 721 – 733
- Krarpup T., (1969), *A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy*, Geodaetisk Institut, Kobenhavn.
- Ligas M., (2012), *Cartesian to geodetic coordinates conversion on a triaxial ellipsoid*, Journal of Geodesy, 86(4), 249 – 256
- Ligas M., (2012), *Two modified algorithms to transform Cartesian to geodetic coordinates on a triaxial ellipsoid*, Studia Geophysica et Geodaetica, 56(4), 993 – 1006
- Ligas M., (2013), *Simple solution to the three point resection problem*, Journal of Surveying Engineering, 139(3), 120 – 125.
- Ligas M., (2013), *Various parameterizations of “latitude” equation – Cartesian to geodetic coordinates transformation*, Journal of Geodetic Science, 3(2), 87 – 94.
- Lin K.C., Wang J., (1995), *Transformation from geocentric to geodetic coordinates using Newton’s iteration*, Bull Geodesique, 69(4), 300–303
- Matern B., (1960), *Spatial Variation*, Springer
- Nurnberg R., (2006), *Distance from a point to an ellipse/ellipsoid*, <http://www2.imperial.ac.uk/~rn/distance2ellipse.pdf>
- Pierlot V., Van Droogenbroeck M., (2014), *A New Three Object Triangulation Algorithm for Mobile Robot Positioning*, IEEE Transactions on Robotics, 30(3), 566 – 577
- Reguzzoni M., Sanso F., Venuti G., (2005), *The theory of general kriging, with applications to the determination of a local geoid*, Geophys. J. Int., 162, 303 – 314
- Roy R., 1973, *Estimation of the covariance function of a homogeneous process on the sphere*, The annals of statistics, 1(4), 780–785.
- Schlather M., 2015, *Package “random fields” in: Simulation and analysis of random fields*, [cran.r-project.org/web/packages/RandomFields/RandomFields.pdf](http://cran.r-project.org/web/packages/RandomFields/RandomFields.pdf).
- Schoenberg I.J., 1942, *Positive definite functions on spheres*, Duke math journal, 9(1), 96–108.
- Seidelmann P.K., Archinal B.A., A’hearn M.F., Conrad A., Consolmagno G.J., Hestroffer D., Hilton J.L., Krasinsky G.A., Neumann G., Oberst J., Stooke P., Tedesco E.F., Tholen D.J., Thomas P.C., Williams I.P., (2007), *Report of the IAU/IAG Working Group on cartographic coordinates and rotational elements: 2006* Celestial Mech Dyn Astr 98, 155–180

Wildberger N.J., (2010), *Greek geometry, rational trigonometry, and the Snellius-Pothenot surveying problem*, Chamchuri J. Math., 2(2), 1-14.

Vening-Meinesz F.A., Heiskanen W.A., (1958), *The Earth and Its Gravity Field*, McGraw-Hill

Vermeille H., (2004), *Computing geodetic coordinates from geocentric coordinates*, Journal of Geodesy, 78, 94–95

## 5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych

Studia wyższe ukończyłem w 2002 r. na Wydziale Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska Akademii Górniczo – Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie (kierunek Geodezja i Kartografia; specjalność: Szacowanie Nieruchomości i Kataster) uzyskując tytuł zawodowy magistra inżyniera. Pracę magisterską napisałem pod kierunkiem dr hab. inż. Edwarda Prewedy. Dotyczyła ona numerycznych metod rozwiązywania układów równań. Będąc jeszcze studentem byłem jednym z organizatorów wyjazdu, mającego na celu geodezyjno – fotogrametryczną inwentaryzację fasad 11 budynków wpisanych na Listę Światowego Dziedzictwa Kulturowego UNESCO, znajdujących się w dzielnicy Bryggen (Bergen, Norwegia). Sprawozdanie z wyjazdu zostało przedstawione w artykule *Wyprawa Bari 2001* (GEODETA 2/2002, autorzy Ligas M., Krajewski S.).

W roku 2002 rozpocząłem studia doktoranckie na Wydziale Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska Akademii Górniczo – Hutniczej w Krakowie. Podczas studiów doktoranckich podjąłem pracę w firmie Eurosystem Sp. z o.o. z siedzibą w Chorzowie. Pracowałem tam w okresie od października 2003 r. do marca 2005 r., najpierw na stanowisku fotogrametry, później pełniąc funkcję kierownika pracowni geoinformatycznej. Pracując w ww. firmie odbyłem półroczny staż zagraniczny pracując dla Simmons Aerofilms Limited, Cheddar, Somerset, Anglia. Zajmowałem się tam najpierw edycją map cyfrowych w jednostce organizacyjnej firmy wykonującej prace dla Ordnance Survey, później zostałem zaangażowany również do kontroli jakości wykonywanych map.

W 2006 roku obroniłem rozprawę doktorską pt. *Przestrzenne modele autoregresji w zastosowaniu do wyceny nieruchomości* napisaną pod kierunkiem prof. dr hab. inż. Józefa Czaji, uzyskując stopień naukowy doktora nauk technicznych w dyscyplinie geodezja i kartografia. Rozprawa doktorska została wyróżniona przez Ministra Budownictwa w roku 2007.

Od października 2006 roku jestem zatrudniony na stanowisku adiunkta, najpierw w Katedrze Geomatyki a obecnie (od stycznia 2017 r.) w Katedrze Geodezji Zintegrowanej i Kartografii na Wydziale Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska Akademii Górniczo – Hutniczej w Krakowie. Od roku 2007 pracuję również na stanowisku starszego wykładowcy w Państwowej Wyższej Szkole Techniczno – Ekonomicznej im. ks. Bronisława Markiewicza w Jarosławiu.

Pracę naukowo – badawczą, od obrony doktoratu, mogę podzielić na dwa okresy. W pierwszym okresie (lata 2006 – 2010) zajmowałem się problematyką stosowania metod statystyki przestrzennej do analizy danych pochodzących z rynków nieruchomości (kontynuacja i rozwój wątków poruszanych w pracy doktorskiej).

Statystyka przestrzenna wydaje się być naturalnym narzędziem do opisu rynków nieruchomości poprzez bezpośrednie odniesienie do lokalizacji w przestrzeni. Lokalizacja jest podstawową cechą nieruchomości kreującą jej wartość a zarazem jest cechą nieruchomości, która może dawać początek efektowi przestrzennej współzależności (autokorelacji). Pierwsze prawo geografii Waldo Toblera mówi, że *„wszystkie obiekty w przestrzeni są powiązane ze sobą, lecz te bliżej siebie bardziej niż te odległe”* (*„everything is related to everything else, but near things are more related than distant things”*). Można to przenieść także na rynek (ryniki) nieruchomości i sformułować wniosek, iż informacje rynkowe wykorzystywane w procesie wyceny, a zwłaszcza ceny transakcyjne nieruchomości, mogą wykazywać pewien stopień autokorelacji. Współzależność tego typu może mieć swoje uzasadnienie w zachowaniu uczestników rynku, którzy w procesach decyzyjnych związanych z zawieraniem transakcji kupna/sprzedaży kierują się informacjami o nieruchomościach sprzedanych w sąsiedztwie. Takie nieruchomości posiadają wiele podobnych cech związanych z dostępnością, otoczeniem oraz oddziaływaniem środowiska. Wszystkie badania prowadzone przeze mnie związane były z kwantyfikowaniem i/lub uwzględnianiem zjawiska autokorelacji cen nieruchomości, bądź zakłóceń modeli wyceny (zjawiska mniej intuicyjnego w interpretacji) w modelowaniu wartości nieruchomości. W analizie danych pochodzących z rynków nieruchomości koncentrowałem się na stosowaniu (z pozytywnym skutkiem) przestrzennych modeli autoregresyjnych (SAR - Spatial Autoregressive Model, SEM - Spatial Error Model, GSM - General Spatial Model będący połączeniem modeli SAR oraz SEM), regresji ważonej geograficznie (Geographically Weighted Regression, GWR), metod geostatystycznych (kriging, jak również metody hybrydowe takie jak np. regresja - kriging)

oraz detekcji autokorelacji przestrzennej (statystyki globalne i lokalne, np. I Morana, C Geary'ego) występującej na rynkach nieruchomości. Stosowane metody i modele statystyki przestrzennej służyły nie tylko konstruowaniu modeli wyceny, uwzględniających autokorelację przestrzenną cen nieruchomości oraz autokorelację przestrzenną składnika losowego (składnik losowy ze strukturą), ale także wizualizacji otrzymanych wyników. Graficzna prezentacja wyników w statystyce przestrzennej poprzez bezpośrednie odniesienie do informacji o lokalizacji obiektów jest charakterystyczną jej cechą. Wizualizacja wyników w odniesieniu do modelowania informacji pochodzących z rynków nieruchomości dotyczyła wykrywania jednorodnych pod względem cen rynków nieruchomości, tworzenia map cenności (np. gruntów), propozycji tworzenia stref i map taksacyjnych itp. Badania nad zastosowaniem omawianych metod i modeli zaowocowały publikacjami oznaczonymi numerami 14 - 21 w "Wykazie opublikowanych prac naukowych ...", punkt E, załącznik nr 4. Publikacje te uważam za pionierskie, jeśli chodzi o wykorzystanie metod statystyki przestrzennej do analizy rynków nieruchomości w Polsce.

W badaniach związanych z analizą rynków nieruchomości zajmowałem się również wykorzystaniem statystycznych metod symulacyjnych takich jak np. bootstrap w języku polskim określanym, jako metody "sznurowadłowe". Na podstawie dużej liczby losowań prób bootstrapowych można oszacować błąd standardowy dowolnej statystyki będącej funkcją próby (bootstrap może być stosowany w metodach regresyjnych, budowaniu przedziałów ufności, weryfikacji hipotez statystycznych i wielu innych zagadnieniach). Oszacowania metodą bootstrap wolne są od założeń, co do rozkładu statystyki w populacji generalnej, nie wymagają skomplikowanych i żmudnych wyprowadzeń mocno opartych o teorię statystyki i rachunku prawdopodobieństwa. Metoda ta została wykorzystana przeze mnie do określenia błędu szacunku jednostkowej wartości nieruchomości w metodzie korygowania ceny średniej (oraz po zastąpieniu średniej miarą odporną na przypadki odstające - medianą), która nie posiada zwartej formuły na jego określenie. W zagadnieniach analizy rynków nieruchomości wskazywałem również na przydatność metod statystyki odpornej (np. LMS - Least Median of Squares), metod "unormalniania" rozkładu zmiennych losowych (transformacja Boxa - Coxa, anamorfoza gaussowska), stosowanie metody krosvalidacji do "badania" zdolności predykcyjnych konstruowanych modeli wyceny nieruchomości (jak również do badania spójności modeli wyceny). Wyżej omówione zagadnienia zostały

przedstawione w publikacji: *Metody statystyczne w wycenie nieruchomości* (Ligas M., 2010, Studia i Materiały Towarzystwa Naukowego Nieruchomości, 18(1), 49-64).

W drugim okresie pracy naukowo – badawczej, od roku 2010, koncentrowałem się na rozwiązywaniu oraz próbie optymalizacji rozwiązań wybranych problemów geodezji geometrycznej (obliczeniowej), jak również stosowaniu metod statystycznych i geostatystycznych w geodezji.

Do badań związanych z konstrukcją algorytmów konwersji współrzędnych kartezjańskich na geodezyjne lub planetograficzne (oraz badaniem ich efektywności pod względem czasu wykonania procedur numerycznych oraz dokładności), opisanych szczegółowo w głównej części autoreferatu, można również zaliczyć prace: *Conversion between Cartesian and geodetic coordinates on a rotational ellipsoid by solving a system of nonlinear equations* (Ligas M., Banasik P., (2011), *Geodesy and Cartography*, 60 (2), 147–161) oraz *A comparison of iterative methods of the cubic rate convergence in the problem of transformation between Cartesian and geodetic coordinates* (Bajorek M., Kulczycki M., Ligas M., 2014, *Geomatics and Environmental Engineering*, 8(2), 15-25).

Pierwsza z wymienionych prac stanowiła adaptację autorskiej metody konwersji współrzędnych kartezjańskich na geodezyjne dotyczącej elipsoidy trójosiowej (opisanej w głównej części autoreferatu) do problemu przeliczania współrzędnych na elipsoidach obrotowych. Ze względu na symetrię elipsoidy obrotowej postawione zadanie zostało zredukowane do przypadku dwuwymiarowego – elipsy południkowej, co znacznie zwiększyło efektywność metody w stosunku do jej trójwymiarowego odpowiednika. Podobnie jak w przypadku elipsoidy trójosiowej rozwiązanie zadania polega na rozwiązaniu układu równań ze względu na współrzędne kartezjańskie punktu znajdującego się na obwodzie elipsy południkowej a będącego rzutem po normalnej punktu, którego współrzędne są przeliczane. Do rozwiązania układu równań zastosowano ogólną metodę Newtona (zbieżność kwadratowa) oraz modyfikację metody Newtona (zbieżność sześcienna). Nowy algorytm został skonfrontowany ze znanymi algorytmami iteracyjnymi: Heiskanen i Moritz (1967), Lin i Wang (1995), Fukushima (1999), Borkowski (1989), Fukushima (2006) i algorytm Bowringa w szybkiej implementacji Fukushimy, Fukushima (1999). Testy numeryczne wykazały, że jedna iteracja metodą o zbieżności sześcienną wystarcza, aby zapewnić zadowalający z praktycznego punktu widzenia poziom dokładności oraz krótki czas przeliczeń porównywalny z metodą Lin i Wang (1995).

W drugiej wymienionej pracy wykorzystano metody rozwiązywania nieliniowych równań o zbieżności sześciennych należących do rodziny metod Czebyszewa - Halley'a oraz metodę Laguerre'a służącą do znajdowania pierwiastków wielomianów. Metody te stosowane były do „równania szerokości” w różnych reprezentacjach, w tym równań czwartego stopnia. Spośród testowanych metod najlepsze pod względem czasu wykonania procedur numerycznych, jak i dokładności obliczanych współrzędnych okazały się metoda Halley'a, zmodyfikowana metoda Halley'a (w literaturze przedmiotu nazywana metodą super – Halley'a) oraz metoda Czebyszewa.

Pierwszy okres pracy naukowej i badania nad zastosowaniem metod statystycznych i statystyki przestrzennej w wycenie nieruchomości stały się dobrą bazą teoretyczną dla zagadnień rozważanych przeze mnie od roku 2010. Główna zmiana w stosowanych przeze mnie metodach polegała na odejściu od metod statystyki przestrzennej dla danych siatkowych/regionalnych (dziedzina przestrzenna skokowa i nielosowa) a przejściu do metod dla danych geostatystycznych (dziedzina przestrzenna ciągła i nielosowa). Zmiana profilu zainteresowań skierowała mnie ku teorii pól losowych (funkcji losowych), metodom geostatystycznym, z ich sztandarową metodą predykcji - krigingiem, często w literaturze przedmiotu określanym, jako "optymalna predykcja dla pól losowych", jak również zakorzenionej w teorii funkcji losowych kolokacji metodą najmniejszych kwadratów.

Jedną z prac, której jestem współautorem, dotyczyła wypracowania metody precyzyjnego opisu powierzchni obiektów powłokowych polegającej na połączeniu dwóch metod interpolacji – splajnów oraz krigingu. Konieczność połączenia metod interpolacji wynikała z faktu, iż funkcje sklepane wymagają względnie regularnego zbioru obserwacji. Pojawienie się przerw w obserwacjach (np. otwory okienne, drzwiowe; niemożność wykonania pomiaru części obiektu ze względów technicznych) powoduje niepożądane wypłaszczenie modelu w regionach bez obserwacji, co z kolei przekłada się na deformacje obszarów przyległych. Kriging uniwersalny (z modelem trendu/dryftu) został wykorzystany w tej pracy do generowania obserwacji (pseudo - obserwacji) w miejscach przerw. Do opisu struktury przestrzennej obserwacji zastosowano tylko semiwariogramy o kształcie parabolicznym przy zbliżaniu się do początku układu współrzędnych (model gaussowski, sinusowy oraz sześcienny). Tego rodzaju modele semiwariogramów charakteryzują ciągłe i regularne pola losowe, co w przypadku analizowanych obiektów powłokowych ma swoje uzasadnienie ze względu na charakter ich powierzchni. Zaproponowana metoda zapewnia subcentymetrową

dokładność nawet w miejscach „luk” – gdzie obserwacje nie były prowadzone. Połączenie funkcji sklepanych i krigingu umożliwia bardzo dokładny, ciągły opis powierzchni wraz z uwzględnieniem lokalnych deformacji. Wyniki z ww. badań zostały przedstawione w publikacji: *Application of splines supported by kriging for precise shape analysis of incompletely measured structures* (Lenda G., Ligas M., 2012, Journal of Computing in Civil Engineering, 26(2), 214-224).

Metody geostatystyczne, obok funkcji sklepanych i dwuwymiarowego szeregu Fouriera, zostały również wykorzystane w studium porównawczym wymienionych metod do interpolacji (aproksymacji) powierzchni obiektów powłokowych (oraz możliwości detekcji deformacji tych powierzchni na ich podstawie). W przeprowadzonym studium metod, kriging przyniósł satysfakcjonujące wyniki z niewielkim tylko odsetkiem punktów, których odchylenia od punktów kontrolnych sięgają 2 cm. Pomimo, iż wyniki otrzymane z krigingu można uważać za wystarczające dla celów inżynierskich to funkcje sklepane w przypadku analizowanego obiektu okazały się skuteczniejsze. Jednakże trzeba zaznaczyć, iż mimo faktu, że globalnie funkcje sklepane okazały się narzędziem dokładniejszym, o tyle kriging był mniej wrażliwy na nieregularny rozkład przestrzenny obserwacji. Przełożyło się to na mniejsze odchylenia od punktów kontrolnych (wspomniane 2 cm), natomiast w przypadku funkcji sklepanych wartości te dochodziły do 8 cm. Wskazuje to, że połączenie tych dwóch metod (kriging do regularyzacji zbioru obserwacji poprzez generowanie pseudo-obserwacji) może przyczynić się do dalszego poprawienia jakości opisu powierzchni tego rodzaju obiektów za pomocą funkcji sklepanych. Wyniki badań nad tym zagadnieniem zostały przedstawione w publikacji: *Determining the shape of the surface of shell structures using splines and alternative methods: kriging and Fourier series* (Lenda G., Ligas M., Marmol U., 2014, KSCE Journal of Civil Engineering, 18(2), 625-633).

Metody predykcji geostatystycznej zostały również wykorzystane w studium porównawczym metod interpolacji (funkcje sklepane, kriging, triangulacja z interpolacją liniową oraz metoda odwrotnych odległości) mających na celu ciągły opis powierzchni osuwiskowych, realizowany w celu okresowej kontroli ruchów mas ziemnych (*The use of surface interpolation methods for landslides monitoring*, Lenda G., Ligas M., Lewińska P., Szafarczyk A., 2015, KSCE Journal of Civil Engineering, 20(1), 188-196).

Innym zastosowaniem metod geostatystycznych była próba znalezienia alternatywy dla transformacji Helmerta (lub dowolnej innej) z korektą post – transformacyjną Hausbrandta.



W wyniku wyrównania modelu transformacji (większa liczba punktów dostosowania niż wynika to z modelu transformacji) punkty dostosowania w układzie wtórnym obarczone zostaną odchyłkami, co wiązałoby się z nadaniem im nowych współrzędnych, które nie są tożsame ze współrzędnymi katalogowymi. W celu zachowania katalogowych współrzędnych punktów dostosowania otrzymane na nich odchyłki dystrybuje się na punkty transformowane stosując odpowiednie wzory interpolacyjne. W przypadku korekt posttransformacyjnych Hausbrandta interpolacja odchyłek odbywa się za pomocą metody odwrotnych odległości. W pracy *Least squares collocation alternative to Helmert's transformation with Hausbrandt's post-transformation correction* (Ligas M., Banasik P., 2014, Reports on Geodesy and Geoinformatics, 97(1), 23-34) wykorzystano w tym celu kolokację metodą najmniejszych kwadratów tożsamą w tym przypadku z krigingiem uniwersalnym. Zmieniono jej charakter z filtru (filtrowanie błędu pomiarowego) na dokładny predyktor (najczęstsze sformułowanie metod krigingowych). Sformułowanie takie „honoruje” dane, czyli w momencie, kiedy dochodzi do predykcji na punktach służących do konstrukcji modelu otrzymuje się dokładnie wartość obserwacji z błędem predykcji równym zero. Takie podejście eliminuje problem zerowania odchyłek na punktach łącznych, ponieważ jest to zapewnione poprzez zastosowany model. Zastosowana procedura jest spójna w tym sensie, że wszystkie oszacowania (parametry transformacji, predykowane zakłócenia oraz macierze kowariancji) wynikają bezpośrednio z teorii. W pracy przedstawiono szkic rozwiązania problemu za pomocą wyżej wymienionej metody a potwierdzenie jej skuteczności (charakteru deformacji wyników transformacji) wymaga jeszcze wielu testów empirycznych. Jako wnioski wstępne związane z omawianym problemem można stwierdzić, że takie podejście, mimo iż może okazać się odpowiedniejsze ze względu na uwzględnienie struktury przestrzennej w odchyłkach do modelu transformacji poprzez funkcję kowariancji lub semiwariogram, będzie jednak bardziej pracochłonne niż metoda Hausbrandta. Dodatkowy nakład pracy będzie wynikał z etapu jakim jest modelowanie funkcji struktury dla odchyłek modelu transformacji. Związana z tym będzie również odpowiednia liczba punktów dostosowania, aby trafnie oszacować wyżej wymienione funkcje struktury.

Badania opisane w pracy *Kriging approach for local height transformations* (Ligas M., Kulczycki M., (2014), Geodesy and Cartography, 63 (1), 25–37) miały na celu próbę podniesienia jakości predykcji wielomianowego modelu transformacji między układami wysokości Kronsztadt'60 i Kronsztadt'86 wykorzystując metody geostatystyczne. Ze względu

na fakt, iż różnice wysokości między dwoma układami wysokości wykazywały istotny trend, naturalną decyzją było wykorzystanie takiego wariantu kriginu, który jest w stanie uwzględnić niestacjonarność średniego zachowania analizowanego zjawiska (niestacjonarność wartości oczekiwanej, tutaj różnice wysokości między ww. układami wysokości). W związku z tym wykorzystano krigin uniwersalny i metodę hybrydową polegającą na połączeniu analizy trendu powierzchniowego (regresja wielomianowa na współrzędne) z kriginem zwyczajnym na resztach z wpasowania modelu trendu powierzchniowego. Otrzymane wyniki wskazały, iż struktura zawarta w rezydującym składniku modelu może przyczynić się do polepszenia możliwości predykcyjnych modelu transformacji. Jednakże, nieco różni się samo stosowanie modelu transformacji opartego na analizie trendu powierzchniowego i metodzie kriginu. W przypadku zastosowanego kriginu uniwersalnego transformacja nowych punktów może zostać wykonana albo poprzez konstrukcję siatki modelowej reprezentującej różnice wysokości między układami albo poprzez konstrukcję i rozwiązanie układu równań kriginu uniwersalnego z dodatkową informacją na temat postaci funkcji struktury danych (funkcja kowariancji lub semiwariogram) oraz informacji na temat doboru sąsiedztwa. W przypadku modelu hybrydowego wspomniana siatka modelowa jak również rozwiązanie układu równań z informacją o semiwariogramie i sąsiedztwie dotyczyłyby tylko rezydującej części modelu. W celu otrzymania całkowitej różnicy wysokości między układami, tak otrzymana część rezydująca (predykowana) musi zostać dodana do poprzednio skonstruowanego modelu powierzchni wielomianowej odzwierciedlającej przeciętne zachowanie różnic wysokości między układami wysokości.

Zainteresowania naukowe związane ze stosowaniem metod statystycznych w geodezji skierowały mnie również w stronę metod statystyki odpornej, zwłaszcza M – estymacji, czyli uogólnienia estymacji metodą największej wiarygodności (*Empirical tests of performance of some M-estimators*, Banaś M., Ligas M., 2014, *Geodesy and Cartography*, 63(2), 127-146). Praca ta dotyczyła porównania trzech M – estymatorów o ugruntowanej pozycji (Hubera, Tukeya oraz Hampela) z sześcioma nowo skonstruowanymi M – estymatorami. Nowe estymatory konstruowane były w oparciu o teorię wielomianów ortogonalnych (w tym przypadku wielomiany Jacobiego), jądrowe estymatory gęstości (jądro Epanechnikova i jądro „trójściennie”) oraz funkcje gęstości prawdopodobieństwa (rozkład „półokręgu” Wignera). Tak powstałe estymatory zostały „wyposażone” w teoretyczne stałe odcinania zapewniające

95% efektywność względem rozkładu normalnego. Dodatkowo, ze względu na fakt, iż wariancja reszt nie jest estymatorem odpornym współczynnika skali, zastosowano: rozstęp kwartylny oraz znormalizowane bezwzględne odchylenie medianowe. Wydajność autorskich M – estymatorów testowana była empirycznie łącznie ze wspomnianymi estymatorami Hubera, Tukeya i Hampela. Testy przeprowadzone były na sieci niwelacyjnej dla różnych scenariuszy obciążania obserwacji błędami grubymi, łącznie rozważono 432 przypadki, co daje pogląd na skuteczność nowych estymatorów w wygaszaniu wpływu obserwacji odstających. Wyniki badań uwiarykowały, iż wydajność M – estymatorów jest uzależniona od zbioru obserwacji, a M - estymatory są niedoskonałe ze względu na fakt, iż wykorzystują jedynie informacje o resztach modelu. Może to powodować efekt błędnej identyfikacji obserwacji (obserwacja wolna od błędu grubego postrzegana jako odstająca i odwrotnie). Otrzymane wyniki motywują do dalszych badań nad wykorzystaniem M – estymacji z wykorzystaniem stałych odcinania, konstruowanych na podstawie konkretnego zbioru danych wejściowych, uwzględniając informację o kształcie funkcji wagowej, strukturze danych, informacji zawartej w macierzy korelacji reszt oraz innych miarach zawierających informacje o geometrii rozwiązywanego problemu.

Informacje uzupełniające o osiągnięciach naukowo - badawczych (w formie syntetycznej) znajdują się w załączniku nr 4 pod tytułem "Wykaz opublikowanych prac naukowych lub twórczych prac zawodowych oraz informacja o osiągnięciach dydaktycznych, współpracy naukowej i popularyzacji nauki".

#### **Wykorzystane odniesienia do literatury**

Borkowski K.M., 1989, *Accurate algorithms to transform geocentric to geodetic coordinates*, Bulletin Geodesique, 63, 50-56.

Fukushima T., 1999, *Fast transform from geocentric to geodetic coordinates*, Journal of Geodesy, 73, 603-610.

Fukushima T., 2006, *Transformation from Cartesian to geodetic coordinates accelerated by Halley's method*, Journal of Geodesy, 79, 689-693.

Heiskanen W.A, Moritz H., 1967, *Physical Geodesy*, W.H. Freeman and Company, San Francisco.

Lin K.C., Wang J., 1995, *Transformation from geocentric to geodetic coordinates using Newton's iteration*, Bulletin Geodesique, 69, 300-3003.

*Marcin Dębes*